

## 2 Binary Relations Cheatsheet

### 2.1 Терминология и обозначения

- \*  $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$  — **декартово произведение** множеств  $A$  и  $B$ . Cartesian product
- \*  $A^2 = A \times A$  — **декартов квадрат** множества  $A$ . Cartesian square
- \*  $R \subseteq A \times B$  — **бинарное отношение**  $R$ , определённое на паре множеств  $A$  и  $B$ . Binary relation
- \*  $R \subseteq A^2$  — (гомогенное) бинарное отношение на множестве  $A$ . Homogeneous relation (endorelation)
- \*  $a R b$  — элементы  $a$  и  $b$  **находятся в отношении**  $R$ , т.е.  $\langle a, b \rangle \in R$ . Ordered pair
- \*  $\mathcal{E}_A = \emptyset$  — **пустое** отношение. Empty relation
- \*  $\text{id}_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$  — **тождественное (диагональное)** отношение. Identity relation
- \*  $\mathcal{U}_A = A^2 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A\}$  — **полное (универсальное)** отношение. Universal relation

### 2.2 Операции над отношениями

- \*  $R \cup S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \vee (a S b)\}$  — **объединение** отношений  $R$  и  $S$ . Union of relations
- \*  $R \cap S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \wedge (a S b)\}$  — **пересечение** отношений  $R$  и  $S$ . Intersection of relations
- \*  $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\} \subseteq B \times A$  — отношение, **обратное** к  $R \subseteq A \times B$ . Converse relation
- \*  $\bar{R} = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \notin R\}$  — **дополнение** отношения  $R$ . Complementary relation
- \*  $R; S = S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z : (x R z) \wedge (z S y)\}$  — **композиция** отношений  $R$  и  $S$ . Composition of relations
  - Если  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$ , то  $R; S \subseteq A \times C$ .
- \*  $R^{oi+1} = R \circ R^{oi}$  — «**композиционная**» (**функциональная**) **степень** отношения  $R$ . Functional power

При этом  $R^{o1} = R$ ,  $R^{o0} = \text{id}_A$ . Чаше используется нотация  $R^i$ , совпадающая с нотацией *Декартовой степени*.
- \*  $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x R y\}$  — **применение** отношения  $R$  ко множеству  $M$ .
- \* **Замыкание отношения**  $R$  относительно свойства  $P$  — минимальное (по включению) надмножество  $R$ , обладающее свойством  $P$ . Closure
  - $R^= = R^r = R \cup \text{id}_A$  — **рефлексивное замыкание** отношения  $R \subseteq A^2$ . Reflexive closure
  - $R^\sim = R^s = R \cup R^{-1}$  — **симметричное замыкание** отношения  $R$ . Symmetric closure
  - $R^+ = R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$  — **транзитивное замыкание** отношения  $R$ , где  $R^1 = R$ ,  $R^{k+1} = R^k \circ R$ . Transitive closure
  - $R^{\equiv} = ((R^r)^s)^t$  — **рефлексивное симметричное транзитивное замыкание** отношения  $R$ . Минимальное отношение эквивалентности, содержащее  $R$ . Reflexive symmetric transitive closure
- \* **Сокращение отношения**  $R$  — минимальное отношение, замыкание которого совпадает с замыканием  $R$ .
  - **Рефлексивное сокращение**  $R^\# = R \setminus \text{id}_A$  — минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием  $R$ , то есть  $(R^\#)^= = R^=$ . Reflexive reduction
  - **Симметричное сокращение**  $R^*$  — минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием  $R$ , то есть  $(R^*)^\sim = R^\sim$ .
  - **Транзитивное сокращение**  $R^-$  — минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием  $R$ , то есть  $(R^-)^+ = R^+$ . Transitive reduction

Транзитивное сокращение  $R^-$  отношения  $R$  без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание:  $R_{\text{DAG}}^- = R \setminus (R \circ R^+) = R \setminus \bigcup_{n \geq 2} R^n$ .

Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли:  $R_{\text{loop-DAG}}^- = (R^\#)^- \cup \{(x, x) \mid x R x\}$ .

### 2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения  $R \subseteq M^2$ : [Properties of homogeneous relations](#)

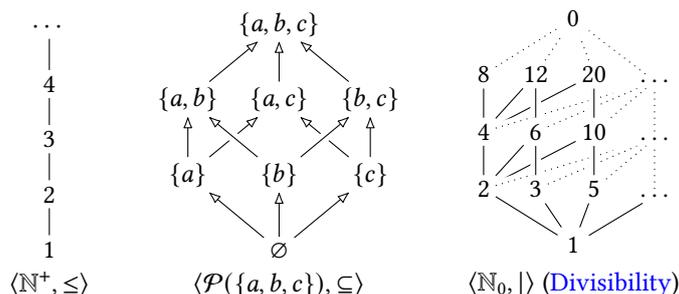
Свойство	Формальное определение
Рефлексивность	<b>Reflexive</b> $\forall x \in M : x R x$
Иррефлексивность	<b>Irreflexive</b> $\forall x \in M : \neg(x R x)$
Корефлексивность	<b>Coreflexive</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)$
Симметричность	<b>Symmetric</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (y R x)$
Антисимметричность	<b>Antisymmetric</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)$
Асимметричность	<b>Asymmetric</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \neg(y R x)$
Транзитивность	<b>Transitive</b> $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow (x R z)$
Антитранзитивность	<b>Antitransitive</b> $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow \neg(x R z)$
Евклидовость (правая)	<b>Right Euclidean</b> $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y R z)$
Евклидовость (левая)	<b>Left Euclidean</b> $\forall x, y, z \in M : (y R x) \wedge (z R x) \rightarrow (y R z)$
Связность	<b>Semiconnex</b> $\forall x, y \in M : (x \neq y) \rightarrow (x R y) \vee (y R x)$
Сильная связность	<b>Connex</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \vee (y R x)$
Плотность	<b>Dense</b> $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \exists z \in M : (x R z) \wedge (z R y)$

### 2.4 Отношения эквивалентности

- \* **Отношение толерантности** — рефлексивное и симметричное. [Tolerance relation](#)
- \* **Отношение эквивалентности** — рефлексивное, симметричное и транзитивное. [Equivalence relation](#)
- \*  $[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}$  — **класс эквивалентности** элемента  $x \in A$ . [Equivalence class](#)
- \*  $A/R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$  — **разбиение** множества  $A$  на **классы эквивалентности**. [Quotient set](#)

### 2.5 Отношения порядка

- \* **Предпорядок (квазипорядок)** — рефлексивное и транзитивное отношение. [Preorder](#)
- \* **Частичный порядок** — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. [Partial order](#)
- \* **Линейный (полный) порядок** — сильно-связный частичный порядок. [Linear \(total\) order](#)
- \* **Строгий частичный порядок** — иррефл., антисимм. и транзитивное отношение. [Strict partial order](#)
- \* **Строгий линейный (полный) порядок** — связный строгий частичный порядок. [Strict total order](#)
- \* **Частично упорядоченное множество** — упорядоченная пара  $\langle M, R \rangle$ , где  $M$  — произвольное множество,  $R \subseteq M^2$  — отношение **частичного порядка** на  $M$ . [Partially ordered set \(Poset\)](#)
- \* Элемент упорядоченного множества  $\langle M, R \rangle$  называется **максимальным**, если он не меньше других элементов, то есть не существует элемента больше. Дуально, элемент называется **минимальным**, если он не больше других, то есть нет элемента меньше. [Maximal and minimal elements](#)  
 $a \in M$  is **maximal**  $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(a R b) \equiv \nexists b \neq a : (a R b) \equiv \forall b \in M : (a R b) \rightarrow (a = b)$   
 $a \in M$  is **minimal**  $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(b R a) \equiv \nexists b \neq a : (b R a) \equiv \forall b \in M : (b R a) \rightarrow (b = a)$
- \* Элемент упорядоченного множества  $\langle M, R \rangle$  называется **наибольшим**, если он больше всех элементов. Дуально, элемент называется **наименьшим**, если он меньше всех элементов. [Greatest and least elements](#)  
 $a \in M$  is **maximum (greatest)**  $\leftrightarrow \forall b : (b R a)$   
 $a \in M$  is **minimum (least)**  $\leftrightarrow \forall b : (a R b)$
- \*  $(x < y) \leftrightarrow (x < y) \wedge \nexists z : ((x < z) \wedge (z < y))$  — **отношение покрытия** ( $y$  «покрывает»  $x$ ). [Covering relation](#)  
 $\circ$  « $\ll$ » — индуцированный строгий частичный порядок:  $(x < y) \leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
- \* **Диаграмма Хассе** — визуализация частично упорядоченного множества  $\langle M, R \rangle$  в виде графа транзитивного сокращения  $R^-$ . Вершины такого графа — элементы множества  $M$ , а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют отношению покрытия. [Hasse diagram](#)



## 2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения  $R \subseteq X \times Y$ :

[Special types of binary relations](#)

Отношение	Формальное определение
Injective (left-unique)	$\forall x, z \in X \forall y \in Y : (x R y) \wedge (z R y) \rightarrow (x = z)$
Functional (right-unique)	$\forall x \in X \forall y, z \in Y : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y = z)$
One-to-One	Injective and Functional
One-to-Many	Injective and not Functional
Many-to-One	Not Injective and Functional
Many-to-Many	Not Injective and not Functional
Serial (left-total)	$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x R y)$
Surjective (right-total)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : (x R y)$

## 2.7 Функции как отношения

- \* **Частичная функция**  $f : X \rightarrow Y$  – Functional бинарное отношение.
- \* **Функция**  $f : X \rightarrow Y$  – Functional и Serial бинарное отношение.

[Partial function](#)  
[Function](#)

### 2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение  $R \subseteq A \times B$ , определённое на паре множеств  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  может быть представлено в виде матрицы  $\|R\|$  размера  $n \times m$ , элементы которой — 0 или 1: [Logical matrix](#)

$$\|R\| = [r_{i,j}] \quad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i R b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \not R b_j \end{cases}$$

Пусть  $R \subseteq M^2$  — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве  $M = \{m_1, \dots, m_4\}$ . Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:

<p><b>Reflexive</b>  <math>\forall x \in M : x R x</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>1</td><td>·</td><td>·</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>·</td><td>1</td><td>·</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>·</td><td>·</td><td>1</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>·</td><td>·</td><td>·</td><td>1</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	1	·	·	·	$m_2$	·	1	·	·	$m_3$	·	·	1	·	$m_4$	·	·	·	1	<p><b>Irreflexive</b>  <math>\forall x \in M : \neg(x R x)</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>0</td><td>·</td><td>·</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>·</td><td>0</td><td>·</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>·</td><td>·</td><td>0</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>·</td><td>·</td><td>·</td><td>0</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	0	·	·	·	$m_2$	·	0	·	·	$m_3$	·	·	0	·	$m_4$	·	·	·	0	<p><b>Coreflexive</b>  <math>\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>·</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>0</td><td>·</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>0</td><td>0</td><td>·</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>·</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	·	0	0	0	$m_2$	0	·	0	0	$m_3$	0	0	·	0	$m_4$	0	0	0	·
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	1	·	·	·																																																																									
$m_2$	·	1	·	·																																																																									
$m_3$	·	·	1	·																																																																									
$m_4$	·	·	·	1																																																																									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	0	·	·	·																																																																									
$m_2$	·	0	·	·																																																																									
$m_3$	·	·	0	·																																																																									
$m_4$	·	·	·	0																																																																									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	·	0	0	0																																																																									
$m_2$	0	·	0	0																																																																									
$m_3$	0	0	·	0																																																																									
$m_4$	0	0	0	·																																																																									
<p><b>Symmetric</b>  <math>\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (y R x)</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>·</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>1</td><td>·</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>1</td><td>0</td><td>·</td><td>1</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>·</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	·	1	1	0	$m_2$	1	·	0	1	$m_3$	1	0	·	1	$m_4$	0	1	1	·	<p><b>Antisymmetric</b>  <math>\forall x, y \in M : (x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>·</td><td>·</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>0</td><td>·</td><td>0</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>1</td><td>1</td><td>·</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>·</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	·	·	0	0	$m_2$	0	·	0	·	$m_3$	1	1	·	0	$m_4$	1	0	1	·	<p><b>Asymmetric</b>  <math>\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \neg(y R x)</math></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td><math>m_3</math></td><td><math>m_4</math></td></tr> <tr><td><math>m_1</math></td><td>0</td><td>·</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>·</td></tr> <tr><td><math>m_3</math></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>m_4</math></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_1$	0	·	0	0	$m_2$	0	0	0	·	$m_3$	1	1	0	0	$m_4$	1	0	1	0
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	·	1	1	0																																																																									
$m_2$	1	·	0	1																																																																									
$m_3$	1	0	·	1																																																																									
$m_4$	0	1	1	·																																																																									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	·	·	0	0																																																																									
$m_2$	0	·	0	·																																																																									
$m_3$	1	1	·	0																																																																									
$m_4$	1	0	1	·																																																																									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$																																																																									
$m_1$	0	·	0	0																																																																									
$m_2$	0	0	0	·																																																																									
$m_3$	1	1	0	0																																																																									
$m_4$	1	0	1	0																																																																									

**Легенда:**

- $m_i$ 

$m_j$ 1
------------

 —  $m_i$  и  $m_j$  находятся в отношении  $R$ , т.е.  $m_i R m_j$
- $m_i$ 

$m_j$ 0
------------

 —  $m_i$  и  $m_j$  не находятся в отношении  $R$ , т.е.  $m_i \not R m_j$
- $m_i$ 

$m_j$ ·
------------

 —  $m_i$  и  $m_j$  могут находиться в отношении  $R$ , а могут и не находиться