

Дискретная математика

Мощность и бесконечность

Константин Чухарев

Осень 2026

Равномощность

Я протестую против использования бесконечной величины как чего-то завершённого.

— Карл Фридрих Гаусс

Сколько бесконечностей?

Натуральных чисел бесконечно много. Действительных — тоже.

На первый взгляд ответ одинаков: и там, и там бесконечно много.

У бесконечности нет числа, но есть размер.

Кантор показал: бесконечностей много, и они разного размера.

Равномощность

Определение 1

Множества A и B **равномощны** (*equinumerous*), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

Обозначение: $|A| = |B|$.

- Для конечных множеств это совпадает с подсчётом.
- Для бесконечных — даёт контринтуитивные выводы.

Пример

$\mathbb{N}$ и чётные числа $E = \{0, 2, 4, \dots\}$ равномощны.

Биекция $f(n) = 2n$, обратная — $g(m) = \frac{m}{2}$.

Мощность $\mathbb{N}$ обозначается $\aleph_0$.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Часть равна целому

- Для конечных множеств часть всегда меньше целого.
- Для бесконечных — нет: $E \subset \mathbb{N}$, но $|E| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Дедекинд определял бесконечность именно так: множество, равномоощное своему собственному подмножеству.

- Галилей в 1638 году заметил, что квадратов столько же, сколько натуральных, и заключил, что к бесконечности слова «больше» и «меньше» неприменимы.
- Кантор ответил иначе: раз биекция есть, значит «столько же».

Отель Гильберта

Отель Гильберта

В бесконечном отеле Гильберта счётное число комнат. Комнаты пронумерованы натуральными числами: $0, 1, 2, \dots$

Все комнаты заняты. Свободных комнат нет.

Администратор расселяет гостей, никого не выселяя и не подселяя двоих в одну комнату.

После каждого заселения отель снова заполнен полностью.

Один новый гость

Отель заполнен, приходит новый гость.

Пример

1. Администратор сдвигает всех на одну комнату: из n — в $n + 1$.
2. Комната 0 освобождается, в неё заселяется гость.

Отель был заполнен, добавился один гость — отель остался заполнен.

$$N_0 + 1 = N_0.$$

Автобус с бесконечным числом гостей

Прибывает автобус со счётным числом гостей $b_0, b_1, b_2, \dots$

Пример

- Старых постояльцев — в чётные комнаты: из n — в $2n$.
- Новых гостей — в нечётные: b_k — в комнату $2k + 1$.

И старых, и новых гостей — $\aleph_0$.

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Бесконечное число автобусов

Прибывает счётное число автобусов, в каждом — счётное число гостей.

Гость на месте j в автобусе i — это $a_{i,j}$, где $i, j \in \mathbb{N}$.

1. Сначала текущих постояльцев расселяем из комнаты n в $2n$ (чётные комнаты).
2. Освободившиеся нечётные комнаты получают пары (i, j) : диагональное перечисление пар даёт каждой паре свой номер.

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Что мы увидели

Наплыв гостей	Мощность
один гость	$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
счётный автобус	$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
счётное число автобусов	$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Отель примет любой счётный наплыв.

Но отступит перед несчётным: действительные числа не расселить ни по какой схеме.

Счётные и несчётные множества

Счётные и несчётные

Определение 2

- Множество **счётно**, если оно конечно или равномощно $\mathbb{N}$.
- Множество **несчётно**, если оно бесконечно и не равномощно $\mathbb{N}$.

Счётное бесконечное множество можно *перечислить* — выписать в один бесконечный список.

$\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счётны, $\mathbb{R}$ — нет.

$\mathbb{Z}$ счётно

Пример

Биекция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ перечисляет:

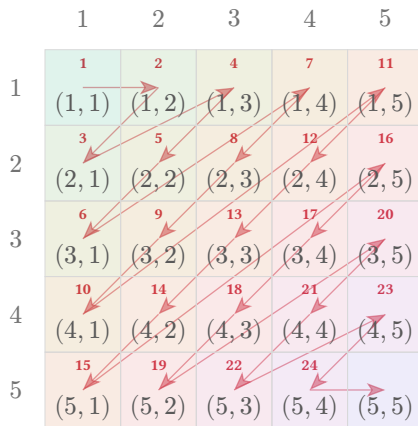
$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

На первый взгляд целых «вдвое больше», чем натуральных.

Биекция всё выравнивает: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

$\mathbb{Q}$ счётно

$\mathbb{Q}$ плотно заполняет прямую — и всё же счётно.



Диагональное перечисление

Дроби перечисляются по диагоналям:

1. Каждая дробь $\frac{p}{q}$ встретится.
2. Пропуская повторные записи одной дроби (сократимые, например $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$), получаем перечисление без повторов.

Плотность — про расположение, мощность — про количество.

Это разные оси.

$\mathbb{R}$ несчётно

Теорема 1

Интервал $(0, 1)$ несчётен, а значит и $\mathbb{R}$.

r_1	3	5	2	7	1	4	8	
r_2	1	8	4	6	2	9	0	
r_3	7	2	5	9	3	0	6	...
r_4	$\neq$	3	1	8	6	2	7	
r_5	9	4	$\neq$	2	0	5	3	
$r = 0.$	4	4	4	4	...	4	$\neq$	$\{r_1, r_2, \dots\}$

Диагональный аргумент

Предположим $(0, 1)$ пересчитимо: $(0, 1) = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$. Каждое r_i записываем десятичной дробью без хвоста из девяток.

- Строим r : в i -й цифре ставим 4, если у r_i там не 4, иначе — 5.
- Только цифры 4 и 5, поэтому у r нет двусмысленной записи вида $0.0999\dots = 0.1000\dots$.
- $r \in (0, 1)$ и отличается от r_i в i -й цифре — противоречие.
- Значит $(0, 1)$ несчётно, а так как $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, то и $\mathbb{R}$ несчётно.

Отрезок и квадрат

Теорема 2

$|[0, 1]| = |[0, 1]^2|$. Отрезок, квадрат, куб — равномощны: для мощности размерность не имеет значения.

$$\begin{array}{ccc} L = [0, 1] & \approx & S = [0, 1]^2 \\ \text{—————} & & \boxed{} \end{array}$$

Переплетение цифр

Доказательство

Переплетение десятичных цифр $(0.x_1x_2..., 0.y_1y_2...) \mapsto 0.x_1y_1x_2y_2...$ — взаимно однозначное соответствие между $[0, 1]^2$ и $[0, 1]$ (с оговоркой про $0.0999... = 0.1000...$).

Кантор три года искал доказательство, что биекции нет — и нашёл биекцию.

«Я вижу это, но не верю».

Программ счётно, языков — континуум

Каждая программа записывается конечным текстом. Конечных строк над конечным алфавитом счётное число.

Программ — $\aleph_0$, потому что каждая программа — конечная строка.

Языков, то есть подмножеств Σ^* , — континуум: $2^{\aleph_0}$.

Значит, почти все языки не вычислимы ни одной программой.

Теорема Кантора

Теорема Кантора

Теорема 3 (Теорема Кантора)

Для любого множества A :

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Булеан всегда строго больше исходного множества.

Диагональное множество $D = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ не лежит в образе f .

Никакая функция $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ не сюръективна.

Лестница мощностей

Теорема Кантора порождает бесконечную иерархию:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

Бесконечностей бесконечно много.

Для конечного A из n элементов: $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Ординалы: обзор

Кардиналы отвечают на вопрос «сколько?», а ординалы — «какой по счёту?». Порядковое число — это тип вполне упорядоченного множества.

Пример

- Натуральные числа по порядку: $0, 1, 2, 3, \dots$
- За всеми натуральными идёт первый бесконечный ординал ω .
- Дальше: $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \dots$

Сложение ординалов не коммутативно: $1 + \omega = \omega$, но $\omega + 1 \neq \omega$. «Сколько» порядок не различает ($\aleph_0 + 1 = \aleph_0$), а «какой по счёту» — различает.

Кардинальная арифметика

Определение 3

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ — мощность счётного множества.

Континуум: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Операция	Результат
$\aleph_0 + \aleph_0$	$\aleph_0$
$\aleph_0 \cdot \aleph_0$	$\aleph_0$
$2^{\aleph_0}$	$> \aleph_0$ — новый кардинал

Сложение и умножение не меняют счётную мощность.

Возведение в степень рождает новый кардинал.

Две иерархии: алефы и беты

Эти две иерархии совпадают тогда и только тогда, когда «пропусков» нет ни на одной ступени.

Бет-числа: лестница булеанов

Определение 4

Бет-числа $\beth_0, \beth_1, \beth_2, \dots$ строятся рекуррентно через булеан:

$$\beth_0 = \aleph_0, \quad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}.$$

Каждый следующий уровень — булеан предыдущего.

Бет	Значение	Что имеет эту мощность
$\beth_0$	$\aleph_0 = \mathbb{N} $	Счётное множество
$\beth_1$	$2^{\aleph_0} = \mathbb{R} $	Континуум
$\beth_2$	$2^{\beth_1} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) $	Подмножества $\mathbb{R}$
$\beth_3$	$2^{\beth_2}$	Подмножества подмножеств $\mathbb{R}$

Беты: конструктивная лестница

Беты — *конструктивная* лестница: на каждом шаге мы знаем точное множество (булеан предыдущего). Диагональный аргумент Кантора гарантирует строгий рост:

$$\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \dots$$

Алеф-числа: лестница «следующих»

Определение 5

Алеф-числа $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ перечисляют все бесконечные кардиналы по порядку:

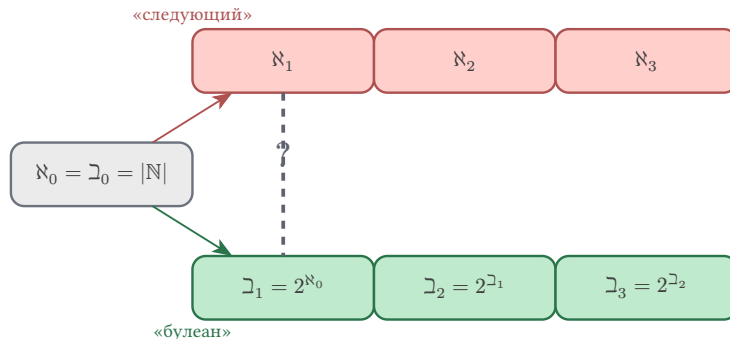
$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|, \quad \aleph_{\alpha+1} = \text{наименьший кардинал, больший } \aleph_\alpha.$$

Алефы — *последовательная* лестница: мы знаем порядок, но не знаем устройства $\aleph_1$. $\aleph_1$ — это просто наименьший кардинал строго больше $\aleph_0$, а как он выглядит — неизвестно.

Пример

$\aleph_0 = \omega$ — первый бесконечный ординал. $\aleph_1$ — наименьший несчётный кардинал. Промежуточные ординалы $\omega + 1, \omega \times 2, \omega^2, \dots$ имеют мощность $\aleph_0$.

Совпадение или нет?



Алефы (верх) и беты (низ) начинаются в одной точке, но строятся по-разному. Вопрос между $\aleph_1$ и $\beth_1$ — это континуум-гипотеза.

Континуум-гипотеза

Определение 6

Континуум-гипотеза (CH) утверждает: не существует кардинала строго между $\aleph_0$ и континуумом.

$$\aleph_1 = \beth_1 = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|.$$

Определение 7

Обобщённая континуум-гипотеза (GCH): для любого бесконечного кардинала κ

$$\aleph_{\kappa+1} = 2^{\kappa} = \beth_{\kappa+1},$$

то есть иерархии совпадают на всей лестнице.

Независимость

Ни CH , ни GCH нельзя ни доказать, ни опровергнуть в ZFC . Коэн (1963) показал независимость CH от ZFC . Это — предел того, что аксиомы множеств фиксируют про размеры бесконечности.

Теорема Кантора– Бернштейна–Шрёдера

Сравнение мощностей

Определение 8

- $|A| \leq |B|$, если существует инъекция $f : A \rightarrow B$.
- $|A| < |B|$, если $|A| \leq |B|$ и биекции нет.

Пример

- Включение даёт $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$.
- Диагональный аргумент — что биекции нет: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера

Теорема 4 (Теорема КБШ)

Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Доказательство

Идея: от $a \in A$ идём назад по g^{-1} , затем вперёд по f , чередуя шаги. Полученные цепочки либо обрываются в A , либо в B , либо бесконечны — тип цепочки определяет, куда отправить элемент, что и задаёт биекцию.

Равномощность доказывается без построения явной биекции.

Достаточно инъекций в обе стороны.

Применение: $|(0, 1)| = |[0, 1]|$

Пример

- Инъекция $(0, 1) \rightarrow [0, 1]$ — включение.
- Инъекция $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$ — сдвиг концов внутрь: $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

По теореме КБШ множества равномощны.

Явную биекцию строить не пришлось.

Что мы поняли?

- Равномощность — это биекция: часть может быть равномощна целому (чётные числа и $\mathbb{N}$).
- Счётное бесконечное множество равномощно $\mathbb{N}$: $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счётны.
- Несчётных строго больше: $\mathbb{R}$ несчётен (диагональ Кантора), и $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ для любого A .
- Программ счётное число, а языков — континуум.

Вопросы для самопроверки

- Докажите: множество чётных чисел равномощно $\mathbb{N}$. Приведите явную биекцию и обратную.
- Докажите: если A и B счётны, то $A \times B$ счётно. Используйте диагональное перечисление пар.
- Покажите, что множество бесконечных битовых строк $\{0, 1\}^\infty$ несчётно.
- Докажите теорему Кантора: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ для любого A .
- Почему $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, но $2^{\aleph_0} > \aleph_0$?
- Докажите через теорему КБШ: $|(0, 1)| = |[0, 1]|$.
- Почему программ счётное число, а языков — континуум?
- Чем отличаются алеф- и бет-иерархии? Что утверждает континуум-гипотеза?