

Дискретная математика

Производящие функции

Константин Чухарев

Осень 2026

Идея

Производящая функция — это верёвка, на которую мы вешаем последовательность чисел для просушки.

— Герберт Уилф

Кости и многочлены

Последовательность можно упаковать в ряд.

Пример

Кость: $D(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Показатель степени хранит сумму на грани, а коэффициент — число способов получить эту сумму.

Две кости: $D(x)^2$, коэффициент при x^7 равен 6.

Умножение многочленов считает комбинации.

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$: показатели складываются.

Определение 1 (Обычная производящая функция (*ordinary generating function*))

Ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

— ОПФ последовательности (a_n) .

Коэффициент: $[x^n]A(x) = a_n$.

Пример

Последовательность $(1, 2, 3, 0, 0, \dots)$ имеет ОПФ $1 + 2x + 3x^2$:

- $[x^0]A = 1$.
- $[x^1]A = 2$.

ОПФ [2]

- $[x^2]A = 3.$

ОПФ и операции

Вся последовательность упакована в один объект, а x играет роль формального символа.

- Сдвигу отвечает умножение на x .
- Свёртке — произведение.
- Рекурренте — уравнение.

Операции

Сдвиги

Определение 2

Сдвиг вправо: $xA(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$, то есть перед последовательностью встаёт ноль.

Сдвиг влево: $\frac{A(x)-a_0}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$.

Пример

Для $A(x) = 1 + 2x + 3x^2$ сдвиг вправо — $x + 2x^2 + 3x^3$ (встал ноль), а влево — $2 + 3x$ (ноль ушёл).

Сдвиги — основной инструмент перевода рекуррент в уравнения.

Свёртка

Теорема 1 (Свёртка)

$$A(x)B(x) = \sum c_n x^n,$$

где $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$. Произведение рядов — свёртка последовательностей.

Пример

$\frac{1}{(1-x)^2}$: коэффициент $c_n = n + 1$ — число пар $(k, n - k)$.

Свёртка отвечает объекту, который собирается из двух независимых частей.

Частичные суммы

Теорема 2

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum s_n x^n,$$

где $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

Деление на $(1-x)$ — суммирование последовательности.

Пример

$\frac{1}{1-x}$ — ряд из единиц.

$\frac{1}{(1-x)^2}$ — частичные суммы: $n+1$.

Базовые ряды

Таблица

Некоторые ОПФ полезно знать наизусть.

a_n	$A(x)$
1	$\frac{1}{1-x}$
n	$\frac{x}{(1-x)^2}$
$\binom{k}{n}$	$(1+x)^k$
$\binom{n+k-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^k}$
c^n	$\frac{1}{1-cx}$

Всё выводится из геометрической прогрессии.

Дифференцирование $\frac{1}{1-x}$ и умножение на x дают ряд n .

Геометрическая прогрессия

Теорема 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Доказательство

Частичные суммы: $S_n = 1 + x + \dots + x^n$, тогда $xS_n = x + \dots + x^{n+1}$ и $S_n - xS_n = 1 - x^{n+1}$, откуда $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. При $|x| < 1$ остаток стремится к нулю и $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Следствия прогрессии

Замена $x \rightarrow cx$: $\frac{1}{1-cx} = \sum c^n x^n$.

Дифференцирование: $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum \binom{n+k-1}{n} x^n$.

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum n x^n, \text{ а } \frac{1}{(1-x)^2} = \sum (n+1) x^n.$$

Умножение на x сдвигает коэффициенты.

Рекуррентности

Метод ОПФ

Определение 3 (Шесть шагов)

1. Умножить рекурренту на x^n , просуммировать.
2. Выразить суммы через $A(x)$ сдвигами.
3. Решить уравнение относительно $A(x)$.
4. Разложить на простейшие дроби.
5. Развернуть в ряд.
6. Прочитать $a_n = [x^n]A(x)$.

Характеристический метод — частный случай ОПФ.

ОПФ работает и для нелинейных рекуррент.

Фибоначчи

Пример

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

$$\text{Пусть } F(x) = \sum F_n x^n.$$

$$\text{Уравнение: } F(x) - x = xF(x) + x^2F(x).$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Дробь $\frac{x}{1-x-x^2}$ не похожа на числа Фибоначчи, но разложение в ряд возвращает их все:

$$F_n = [x^n] \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Формула Бине

Определение 4 (Простейшие дроби)

Разложить $\frac{1}{(1-\rho_1x)(1-\rho_2x)}$ на $\frac{A}{1-\rho_1x} + \frac{B}{1-\rho_2x}$.

Пример

$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\psi x} \right)$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — корни уравнения $t^2 = t + 1$.

Коэффициент: формула Бине

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Простейшие дроби извлекают коэффициент из рациональной функции.

Формула Бине [2]

Каждая дробь $\frac{1}{1-\rho x}$ — геометрический ряд.

Каталан

Нелинейная рекуррента — свёртка последовательности с собой.

Определение 5 (Рекуррента Каталана)

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

C_n — число бинарных деревьев с n внутренними узлами.

Замкнутая форма

Пример

Правая часть — коэффициент при x^n в $C(x)^2$.

Уравнение: $C(x) = 1 + xC(x)^2$.

Из двух корней квадратного уравнения берём $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$: второй корень расходится в нуле, а нам нужно $C(0) = C_0 = 1$. Обобщённый бином Ньютона даёт

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Свёртка с собой

Рекуррента Каталана — свёртка последовательности с самой собой:

- каждый C_{n+1} суммирует произведения $C_i C_{n-i}$ по всем разбиениям n .
- свёртке соответствует умножение рядов: коэффициент при x^n в $C(x)^2$ — ровно $\sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$.

ОПФ работает и для нелинейных рекуррент: свёртка с собой — квадрат $C(x)^2$, а не линейная комбинация.

Кратный корень

Когда у знаменателя кратный корень, в разложении появляется полиномиальный множитель.

Пример

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 4.$$

$$A(x) = \frac{1}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{1}{(1 - 2x)^2}.$$

$$a_n = [x^n] \frac{1}{(1 - 2x)^2} = (n + 1)2^n.$$

Общая формула: $[x^n] \frac{1}{(1 - \rho x)^m} = \binom{n+m-1}{n} \rho^n$.

Кратность m даёт полиномиальный множитель степени $m - 1$.

Неоднородная

Правая часть — не ноль, а функция от n .

Пример

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_0 = 1.$$

Ряд $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ подставляется готовым.

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3}.$$

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Неоднородность входит через табличный ряд правой части.

Характеристическому методу нужен отдельный приём. ОПФ — нет.

Экспоненциальные ПФ

Определение ЭПФ

Определение 6 (Экспоненциальная производящая функция)

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Коэффициент: $a_n = n![x^n]E(x)$.

Множитель $\frac{1}{n!}$ — для помеченных объектов и факториального роста.

ОПФ — для неразмеченных, ЭПФ — для размеченных.

ЭПФ единиц

Пример

$$a_n = 1$$

:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Та же последовательность имеет ОПФ $\frac{1}{1-x}$.

Одна последовательность — два представления.

Выбор слагаемых x^n или $\frac{x^n}{n!}$ диктует структура объекта.

Операции над ЭПФ

Теорема 4 (Операции над ЭПФ)

- Сдвиг влево:

$$\frac{d}{dx}E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

- Биномиальная свёртка:

$$A(x)B(x) = \sum c_n \frac{x^n}{n!}, \quad c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}.$$

Биномиальная свёртка

Пример

$A(x) = B(x) = e^x$: свёртка даёт $e^x \cdot e^x = e^{2x}$, а $2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$.

$\binom{n}{i}$ появляется сам, из $\frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Выбор i помеченных элементов из n .

Таблица ЭПФ

a_n	$E(x)$
1	e^x
$n!$	$\frac{1}{1-x}$
c^n	e^{cx}
B_n (числа Белла)	e^{e^x-1}

Разбиение — это набор непустых блоков.

- Помеченный непустой блок имеет ЭПФ $F(x) = e^x - 1$,
- набор из k блоков — $\frac{F(x)^k}{k!}$,
- а сумма по всем k даёт $e^{F(x)} = e^{e^x-1}$.

Отсюда $B(x) = e^{e^x-1}$.

Применения

Композиции числа

Определение 7 (Композиция)

Композиция числа n — представление n упорядоченной суммой положительных слагаемых.

Рекуррента композиций

Пример

Композиции 3 — четыре:

- 3.
- $2 + 1$.
- $1 + 2$.
- $1 + 1 + 1$.

Рекуррента $a_n = a_{n-1} + \dots + a_0$ с базой $a_0 = 1$: каждое a_n — сумма всех предыдущих членов.

$$A(x) = \frac{1-x}{1-2x}, \quad a_n = 2^{n-1}$$

для $n \geq 1$.

Число композиций

Между n единицами — $n - 1$ промежутков.

В каждом плюс либо нет: 2^{n-1} композиций.

Размен денег

Пример

Монеты 1, 2, 5 рублей.

Монета достоинства d : $1 + x^d + x^{2d} + \dots = \frac{1}{1-x^d}$.

Число способов набрать n — коэффициент при x^n в

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}.$$

Каждое достоинство — множитель $\frac{1}{1-x^d}$.

Произведение таких множителей и есть ответ.

Быстрая сортировка

Пример

Ожидаемое число сравнений на входе размера n :

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad C_0 = 0.$$

Умножив рекурренту на n и перейдя к $n + 1$, получаем $(n + 1)C_{n+1} = 2n + (n + 2)C_n$.

После деления на $(n + 1)(n + 2)$ сумма телескопируется и даёт:

$$C_n = 2(n + 1)H_n - 4n, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Полный цикл метода

$H_n \sim \ln n + \gamma$; $C_n \sim 2n \ln n$ — классическое $O(n \log n)$.

Полный цикл метода: комбинаторная задача $\rightarrow$ рекуррента $\rightarrow$ замкнутая форма (*closed form*) $\rightarrow$ асимптотика.

Вероятностные ПФ

Определение 8 (Вероятностная ПФ)

Для дискретной случайной величины X с $p_k = P(X = k)$:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Пример

Бернулли с $p = \frac{1}{2}$: $G_X(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s$, и $E[X] = G_X'(1) = \frac{1}{2}$.

Моменты

Матожидание — производная в точке 1: $E[X] = G_X'(1)$.

Второй факториальный момент: $E[X(X-1)] = G_X''(1)$.

Свёртке распределений соответствует произведение функций.

ОПФ — та же конструкция, применённая к распределению.

Мост к лекции по вероятностям.

Что мы поняли?

- Последовательность (a_n) упакована в один ряд $A(x) = \sum a_n x^n$. Коэффициент $[x^n]A(x)$ возвращает a_n .
- Операции над рядами — операции над последовательностями: сдвиг — умножение на x , свёртка — произведение, частичные суммы — деление на $(1 - x)$.
- Рекуррента переводится в уравнение на $A(x)$, а простейшие дроби извлекают коэффициент. Так решаются и нелинейные рекурренты вроде Каталана.
- ОПФ — для неразмеченных объектов, ЭПФ с $\frac{x^n}{n!}$ — для помеченных. Выбор ряда диктует структура объекта.

Вопросы для самопроверки

- Что такое ОПФ и что означает $[x^n]A(x)$?
- Что делает умножение на x с последовательностью?
- Запишите формулу свёртки.
- Почему $\frac{1}{(1-x)^2}$ имеет коэффициенты $n + 1$?
- Найдите ОПФ для чисел Фибоначчи.
- Как разложить $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ на простейшие дроби?
- Откуда берётся уравнение Каталана $C(x) = 1 + xC(x)^2$?
- Что даёт кратный корень знаменателя?
- Чем ЭПФ отличается от ОПФ?
- Запишите формулу биномиальной свёртки.