

Дискретная математика

Матроиды

Константин Чухарев

Осень 2026

Жадный алгоритм

*Всё должно быть настолько просто, насколько возможно,
но не проще.*

— Альберт Эйнштейн

Задача выбора

Определение 1 (Задача выбора)

Даны конечное множество E , весовая функция $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ и семейство $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ допустимых подмножеств. Нужно найти $A \in \mathcal{F}$ с максимальным весом $w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$.

Жадный алгоритм перебирает элементы по убыванию веса и добавляет очередной элемент, если множество остаётся допустимым. Вся трудность задачи сводится к проверке допустимости.

Жадный не всегда оптимален

Пример (Размен монет)

Монеты 25, 10 и 1 цент.

Выдать 30 центов: жадный алгоритм берёт 25 + пять по 1 — шесть монет.

Оптимум — три по 10.

Жадный алгоритм прост, но в общем случае неоптимален.

В каких задачах он оптимален?

Крускал и Хаффман — жадные алгоритмы, и оба оптимальны.

Причина оптимальности Крускала — структура матроида.

Три задачи

Пример (Максимальный лес)

В треугольнике рёбра имеют веса 5, 4 и 3, а допустимыми считаются леса.

Жадный алгоритм берёт 5 и 4 — вес 9, оптимально.

Пример (Базис максимального веса)

Три вектора плоскости: $v_1 = (1, 0)$ веса 5, $v_2 = (0, 1)$ веса 4, $v_3 = (1, 1)$ веса 3.

Допустимы независимые наборы.

Жадный алгоритм берёт v_1 и v_2 — вес 9. v_3 отбрасывает: все три вектора зависимы.

Пример (Набор ограниченного размера)

Элементы 5, 3, 4, 2. Размер не более двух.

Жадный алгоритм берёт 5 и 4 — вес 9.

Общая причина

Во всех трёх задачах действует одно из трёх правил допустимости:

- ацикличность,
- независимость,
- ограничение размера.

Общая причина успеха жадного алгоритма — в этой структуре.

Наследственность

Определение 2 (Наследственность)

Подмножество допустимого допустимо: выбросил элементы — не испортил.

Пример

Леса графа: подмножество леса — лес.

Выбросили ребро — цикл не появится.

Свойство замены

Определение 3 (Свойство замены)

Для любых $A, B \in \mathcal{I}$ с $|A| < |B|$ найдётся $x \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Пример (Замена в треугольнике)

В треугольнике с рёбрами a, b, c возьмём леса $A = \{a\}$ и $B = \{b, c\}$.

$|A| = 1 < 2 = |B|$, и ребро $b \in B \setminus A$ можно добавить к A : набор $\{a, b\}$ ацикличен.

Наследственность и замена — два свойства матроида.

Определение матроида

Матроид

Определение 4 (Матроид)

Пара $(E, \mathcal{I})$ — **матроид**, если выполнены:

- **Наследственность**: $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$ влечёт $B \in \mathcal{I}$.
- **свойство замены** (*exchange property*): для любых $A, B \in \mathcal{I}$ с $|A| < |B|$ существует $x \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.
- $\emptyset \in \mathcal{I}$ — пустое множество независимо.

Множества из $\mathcal{I}$ — **независимые**.

Свойство замены — из линейной алгебры.

Из базиса можно выбросить вектор и добавить другой.

Наследственность без замены — не матроид.

Проверка аксиом: $U_{2,3}$

Пример

$U_{2,3}$: независимы подмножества $\{1, 2, 3\}$ размера не более 2.

Наследственность: подмножество размера ≤ 2 тоже размера ≤ 2 .

Замена: если $|A| < |B| \leq 2$, у B есть элемент вне A — добавить его безопасно.

База и ранг

Определение 5

- **База** — максимальное по включению независимое множество.
- **Ранг** — размер базы.

Все базы матроида имеют одинаковый размер: иначе для баз A, B с $|A| < |B|$ свойство замены дало бы независимое множество $A \cup \{x\}$, строго большее базы A .

- В линейном матроиде база — базис пространства.
- В графическом — остовное дерево.

Пример

В треугольнике базы — пары рёбер.

Все три ребра зависимы.

Графический

Определение 6 (Графический)

Основное множество — рёбра графа, а независимыми считаются леса. Минимальное зависимое множество — это цикл, графовый аналог нулевого вектора.

Пример

В дереве независимо любое подмножество рёбер.

В графе с циклом сам цикл — минимальное зависимое множество.

Линейный

Определение 7 (Линейный)

Основное множество — векторы пространства, а независимыми считаются линейно независимые наборы.

Пример (Векторы плоскости)

Векторы $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$.

Независимы пустое множество, одиночные векторы и все пары.

Все три зависимы: $v_3 = v_1 + v_2$. Базы — пары векторов.

Униформный

Определение 8 (Униформный $U_{k,n}$)

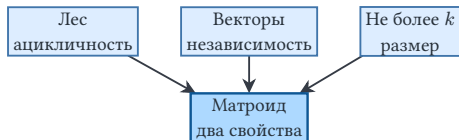
Подмножества размера не более k .

Пример (Униформный матроид $U_{2,4}$)

Независимы все подмножества размера не более двух.

Базы — двухэлементные подмножества. Любое трёхэлементное подмножество зависимо.

Три источника



Три источника — один матроид.

Проверка аксиом — наследственность и замена.

Корректность жадного

Теорема Радо–Эдмондса

Теорема 1 (Теорема Радо–Эдмондса)

Пусть $(E, \mathcal{I})$ — матроид.

Для любой неотрицательной весовой функции жадный алгоритм находит независимое множество максимального веса.

Доказательство

Доказательство

Все базы имеют одинаковый размер r . Жадный возвращает базу.

Пусть $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ — база, которую вернул жадный алгоритм, а $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ — оптимальное решение. Так как веса неотрицательны, оптимум можно считать базой того же размера r . Оба множества отсортированы по убыванию веса.

Пусть i — первый индекс с $w(g_i) < w(b_i)$. К множеству $G_{i-1} = \{g_1, \dots, g_{i-1}\}$ и $B_i = \{b_1, \dots, b_i\}$ применимо свойство замены: $|G_{i-1}| = i - 1 < i = |B_i|$, значит, существует $x \in B_i \setminus G_{i-1}$ с $G_{i-1} \cup \{x\}$ независимым.

Элементы B_i отсортированы, поэтому $w(x) \geq w(b_i) > w(g_i)$. Жадный рассмотрел x раньше g_i . В этот момент его текущее множество — подмножество G_{i-1} , а $G_{i-1} \cup \{x\}$ независимо, поэтому по наследственности x можно было добавить — противоречие.

Достаточно двух аксиом

Оптимальность не требует отдельного доказательства: достаточно двух аксиом.

Обратное утверждение

Без свойства замены жадный может ошибаться.

Определение 9 (Система независимости)

Наследственное семейство подмножеств.

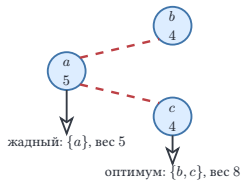
Матроид — система независимости со свойством замены.

Контрпример

Пример

$\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}$ — наследственное семейство без свойства замены.

$A = \{a\}, B = \{b, c\}$: $|A| < |B|$, но ни b , ни c нельзя добавить к a .



Пусть вес a равен 5, а веса b и c — по 4. Жадный алгоритм берёт $\{a\}$ (вес 5), оптимум — $\{b, c\}$ (вес 8). Замена отделяет оптимум от ошибки.

Применения

- **Крускал** — жадный алгоритм на графическом матроиде.
- **Базис максимального веса** — на линейном.
- **Расписания** — матроид расписаний.

Разные алгоритмы — один жадный на разных матроидах.

Крускал находит максимальный лес. Задача о минимальном остове — сменой знака весов.

Что мы поняли?

- Жадный алгоритм прост, но оптимален лишь при особой структуре семейства допустимых.
- Матроид задают две аксиомы: наследственность и свойство замены.
- Теорема Радо–Эдмондса: на матроиде жадный находит множество максимального веса для любой весовой функции.
- Один жадный алгоритм на разных матроидах: Крускал на графическом, базис максимального веса на линейном.

Вопросы для самопроверки

- Сформулируйте задачу выбора и жадный алгоритм.
- Почему жадный алгоритм неоптимален для размена монет?
- Проверьте наследственность и свойство замены для лесов.
- Дайте определение матроида.
- Почему все базы матроида имеют одинаковый размер?
- Приведите пример матроида и его базы.
- Сформулируйте теорему Радо–Эдмондса.
- Почему без свойства замены жадный может ошибаться? Приведите контрпример.