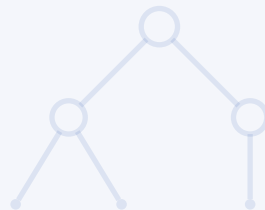


Лекция

8–9 сентября

Высказывания и связки



Логика высказываний

Книга природы написана на языке математики.

— Галилео Галилей

Почему логика?

Математическое рассуждение должно быть однозначным и проверяемым.

Обычный язык для этого не годится: он двусмыслен.

Пример

Рассмотрим следующую фразу:

«каждый студент знает хотя бы один язык программирования»

Это утверждение можно понять двояко:

- либо у каждого студента *свой* язык
- либо один язык, который знают *все*

Логика — наука о том, что из чего следует.

Она даёт точные правила, как проверять рассуждения.

Применения

Формальная логика — рабочий инструмент и математики, и computer science.

- Верификация программ: доказать, что код никогда не падает.
- Системы типов: соответствие Карри–Ховарда — доказательства как программы.
- Запросы к базам данных: условия WHERE — формулы.
- Схемы: булевы функции на вентилях.
- Доказательные помощники: Lean, Coq, Isabelle.
- Автоматическое доказательство теорем.
- Вопросы разрешимости: можно ли ответить на вопрос механически.

Аппарат один: формулы, следствия, доказательства.

Головоломка

На острове живут рыцари и лжецы.

Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут.

Вы встречаете двух жителей: А и В.

А говорит: «Мы оба лжецы».

Кто из них рыцарь, а кто лжец?

К концу лекции вы решите эту головоломку формально.

Высказывание

Определение 1

Высказывание — это утверждение, которое истинно или ложно.

Пример

- $2 + 2 = 4$ — истинно.
- $5 < 3$ — ложно.
- «Сегодня идёт дождь» — высказывание: оно либо истинно, либо ложно.

Не-высказывания

Пример

- «Который час?» — вопрос.
- «Закрой дверь» — команда.
- $x > 5$ — зависит от x : пока x не задано, истинностного значения нет.

Высказывание — атом рассуждения.

Из высказываний строятся формулы, как из чисел — выражения.

Логические связки

Составные высказывания строятся из простых.

Для этого нужны связки.

Связка	Смысл	Пример
$\neg$	не	«не идёт дождь»
$\wedge$	и	«светит солнце и нет дождя»
$\vee$	или (включающее)	«возьму зонт или дождевик»
$\rightarrow$	если ... то	«если дождь, то возьму зонт»
$\leftrightarrow$	тогда и только тогда	«дождь тогда и только тогда, когда небо в тучах»

Отрицание

Определение 2

Отрицание высказывания P , обозначается $\neg P$, истинно тогда и только тогда, когда P ложно.

P	$\neg P$
F	T
T	F

Пример

«Сегодня идёт дождь» и «сегодня не идёт дождь» — отрицания друг друга.

Конъюнкция

Определение 3

Конъюнкция $P \wedge Q$ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Конъюнкция требует *оба*.

Достаточно одной ложной части — и всё высказывание ложно.

Дизъюнкция

Определение 4

Дизъюнкция $P \vee Q$ истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

«Или» здесь *включающее*: истинно и при обоих истинных.

Бытовое «или-или» — исключающее, но в логике по умолчанию — включающее.

Импликация

Определение 5

Импликация $P \rightarrow Q$ истинна всегда, кроме случая, когда P истинно, а Q ложно.

P называется **антецедентом** (посылкой), Q — **консеквентом** (заключением).

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Вакуумная истинность

- Из ложной посылки следует что угодно — **вакуумная истинность**.
- Обещание «если сдашь экзамен, куплю тебе телефон» не нарушено, когда экзамен не сдан.
- Утверждение «если $2 + 2 = 5$, то я — император» — истинно.

Импликация с ложной посылкой истинна при любом заключении.

Отрицание импликации

Отрицание импликации — конъюнкция:

$$\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q, \quad \text{а не} \quad P \rightarrow \neg Q$$

Проверьте таблицей: $P \rightarrow Q$ ложно ровно при $P = 1, Q = 0$, а это в точности $P \wedge \neg Q$.

Частая ошибка — пронести отрицание внутрь и получить $P \rightarrow \neg Q$.

Эквивалентность

Определение 6

Эквивалентность $P \leftrightarrow Q$ истинна тогда и только тогда, когда P и Q имеют одинаковые истинностные значения.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Эквивалентность — «двусторонняя» импликация.

$P \leftrightarrow Q$ это то же самое, что $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Составные высказывания

Из высказываний и связок строятся формулы.

Чтобы формула была однозначной, нужен порядок действий.

Приоритет	Связка
-----------	--------

1 (высший)	$\neg$
------------	--------

2	$\wedge$
---	----------

3	$\vee$
---	--------

4	$\rightarrow$
---	---------------

5 (низший)	$\leftrightarrow$
------------	-------------------

Скобки и порядок действий

Пример

В формуле $(P \vee Q) \wedge \neg P$ скобки задают порядок.

Скобки берут верх над приоритетом.

- Сначала собирается $P \vee Q$.
- Отрицание $\neg P$ вычисляется отдельно.
- Конъюнкция двух готовых частей — последней.

Развязка головоломки

Обозначим A : « A — рыцарь», B : « B — рыцарь».

Утверждение A записывается как $\neg A \wedge \neg B$.

Доказательство

Если A — рыцарь, то высказывание A (« A — рыцарь») истинно, и его утверждение истинно. Но тогда истинна конъюнкция $\neg A \wedge \neg B$, а в ней $\neg A$ ложно — противоречие.

Значит, A ложно: A — лжец.

Его утверждение ложно, то есть ложно $\neg A \wedge \neg B$. Первый член $\neg A$ истинен, поэтому ложен второй: $\neg B$ ложно, значит B истинно.

Итак, A — лжец, B — рыцарь.

Мы только что доказали утверждение формально.

Парадокс лжеца

А что с высказыванием «это высказывание ложно»?

Доказательство

Пусть S : « S ложно». Формально: $S \leftrightarrow \neg S$.

Если S истинно, то по определению S ложно — противоречие.

Если S ложно, то $\neg S$ истинно, значит S истинно — противоречие.

Никакой интерпретации не существует.

Это не головоломка, а **парадокс**: формула невыполнима.

Самореференция — то, что в итоге приведёт к теоремам Гёделя.

Развилка

- Две дороги: одна к сокровищу, другая к гибели.
- На развилке стоит один житель — рыцарь или лжец, неизвестно.
- Разрешён один вопрос с ответом «да» или «нет».

Вопрос: «Если я спрошу тебя, ведёт ли левая дорога к сокровищу, ты ответишь «да»?»

Доказательство

Пусть L : «левая дорога к сокровищу».

Рыцарь отвечает «да» тогда и только тогда, когда L .

Лжец о прямом вопросе солгал бы: «нет» при L . Но на вопрос «ответил бы ты «да»?» он лжёт снова — и говорит «да» при L .

Оба типа дают ответ «да» ровно при L .

Логика и код

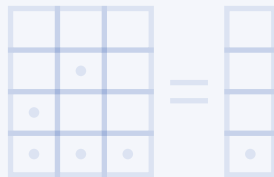
- Условия в коде — это высказывания: «if ($x > 0$ and $x < 10$)».
- Отрицание условия — отрицание высказывания.
- Например, «не (A и B)» эквивалентно «(не A) или (не B)».

Пример

«if (not (a and b))» можно переписать как «if (not a or not b)».

Упрощение булевых условий — обычная задача в коде.

Компиляторы и линтеры делают это автоматически, но понимать, почему это работает, — задача человека.



Таблицы истинности и законы логики

Цель абстракции — не расплывчатость, а новый уровень точности.

— Эдсгер Дейкстра

Интерпретация

Истинность формулы зависит от значений переменных.

Определение 7 (Интерпретация)

Интерпретация — функция $\nu : V \rightarrow \{0, 1\}$, приписывающая истинностное значение каждой переменной формулы.

Множество V — множество переменных.

Пример

Для $P \wedge Q$ интерпретация $\nu(P) = 1, \nu(Q) = 0$ даёт значение 0. Другой выбор значений — другая интерпретация.

Интерпретация — строка будущей таблицы истинности.

Проверить формулу — перебрать все 2^n интерпретаций.

Распространение интерпретации

Интерпретация задаёт значения только переменных.

Истинность составных формул вычисляется по структуре.

Определение 8 (Распространение интерпретации)

Интерпретация ν распространяется с переменных на формулы:

$$\nu(\neg\alpha) = 1 - \nu(\alpha)$$

$$\nu(\alpha \wedge \beta) = \nu(\alpha) \cdot \nu(\beta)$$

$$\nu(\alpha \vee \beta) = \max(\nu(\alpha), \nu(\beta))$$

$$\nu(\alpha \rightarrow \beta) = \max(1 - \nu(\alpha), \nu(\beta))$$

Значение формулы

Эквивалентность $\leftrightarrow$ — сокращение: $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Значение формулы — функция от интерпретации.

Таблица истинности — полное перечисление этой функции.

Таблица истинности

Таблица истинности перечисляет все 2^n наборов значений атомов — все **интерпретации**.

Столбцы — атомы и промежуточные подформулы. Последний столбец — результат.

Пример

Таблица истинности для $(P \vee Q) \wedge \neg P$:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$
F	F	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	T	F	F
T	T	T	F	F

Таблица — исчерпывающая проверка.

Классификация формул

Определение 9 (Классы формул)

- **Тавтология** — истинна при всех интерпретациях.
- **Противоречие** — ложна при всех интерпретациях.
- **Выполнимая** (*satisfiable*) — истинна хотя бы на одной интерпретации.

Интерпретацию, при которой формула истинна, называют **моделью** этой формулы.

Пример

- $P \vee \neg P$ — тавтология (**закон исключённого третьего**).
- $P \wedge \neg P$ — противоречие.
- P — выполнима, но не тавтология.

Логическая эквивалентность

Определение 10

Формулы A и B логически эквивалентны, обозначается $A \equiv B$, если формула $A \leftrightarrow B$ — тавтология.

Пример

$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ — это **закон де Моргана**.

Обе формулы дают одинаковые значения на всех четырёх наборах.

Эквивалентность — инструмент переписывания.

Одну формулу можно заменить другой внутри любой формулы.

Логическое следствие

Определение 11

Формула B — **логическое следствие** формул $A_1, \dots, A_n$, обозначается $A_1, \dots, A_n \models B$, если на каждой интерпретации, где истинны все A_i , истинна и B .

Пример

Рассуждение по схеме **modus ponens**: $P \rightarrow Q, P \models Q$.

Если импликация $P \rightarrow Q$ и её антецедент P истинны, то консеквент Q также обязан быть истинным.

Теорема 1 (Семантическая теорема о дедукции)

$A_1, \dots, A_n \models B$ тогда и только тогда, когда формула $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ — тавтология.

Следствие — семантическая основа правил вывода.

Законы логики высказываний

Связки подчиняются законам, похожим на законы арифметики.

Закон	Формулы
Идемпотентность	$P \vee P \equiv P,$ $P \wedge P \equiv P$
Коммутативность	$P \vee Q \equiv Q \vee P,$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Ассоциативность	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R),$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Дистрибутивность	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Поглощение	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P,$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Двойное отрицание	$\neg\neg P \equiv P$

Законы логики высказываний [2]

Закон	Формулы
-------	---------

Тождество	$P \vee \mathbf{F} \equiv P,$ $P \wedge \mathbf{T} \equiv P$
-----------	---

Дополнение	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{T},$ $P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$
------------	---

Доминирование	$P \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T},$ $P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
---------------	---

Упрощение формул

Законы — инструмент переписывания.

Покажем, что формула $\neg(P \wedge Q) \vee P$ — тавтология:

$$\begin{aligned} & \neg(P \wedge Q) \vee P \\ \equiv & (\neg P \vee \neg Q) \vee P && \text{де Морган} \\ \equiv & (\neg P \vee P) \vee \neg Q && \text{коммутативность и ассоциативность} \\ \equiv & \mathbf{T} \vee \neg Q && \text{закон исключённого третьего} \\ \equiv & \mathbf{T} && \text{доминирование} \end{aligned}$$

Упрощение — первый шаг к ответу на вопрос о выполнимости формулы.

Законы де Моргана

Теорема 2 (Законы де Моргана)

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Интуиция: «не (A и B)» — это «(не A) или (не B)».

Неверно, что и A, и B истинны — значит, хотя бы одно из них ложно.

Проверка де Моргана

Доказательство

Проверим таблицей истинности первую формулу.

Колонки $\neg(P \wedge Q)$ и $\neg P \vee \neg Q$ совпадают на всех наборах.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	F

Вторая формула доказывается аналогично.

Де Морган в коде

Законы де Моргана — рабочий инструмент программиста.

Пример

Проверка на вхождение в диапазон: « $x \geq 0$ and $x \leq 100$ ».

Отрицание этой проверки: « $x < 0$ or $x > 100$ ».

Отрицание «внутри диапазона» — «вне диапазона».

Де Морган — готовый способ переписать отрицание проверки.

- Высказывания и их законы — готовый язык для конечного набора атомов.
- Следующий шаг — говорить обо всех объектах сразу: предикаты и кванторы, лекция 2.

Лекция 1: что мы поняли?

- Высказывание — атом рассуждения. Из атомов и связок строятся формулы, значение которых вычисляется однозначно.
- Таблица истинности — исчерпывающая проверка на 2^n наборах. Тавтология, противоречие, выполнимость.
- Эквивалентность $\equiv$ — инструмент переписывания. Законы логики высказываний и де Морган — рабочие.
- Следствие $\models$ превращает таблицу в критерий правильности рассуждения.
- Язык атомов не выражает утверждений вида «для всех x » — это кванторы, лекция 2.

Вопросы для самопроверки

1. Постройте таблицу истинности для $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$.
2. Тавтология ли формула $(P \wedge Q) \rightarrow P$? Ответьте таблицей.
3. Упростите $\neg(P \vee Q) \vee P$ законами логики высказываний: тавтология, противоречие или ни то, ни другое?
4. Перепишите по де Моргану отрицание условия « $x \geq 0$ and $x \leq 100$ ».

Чтение к следующей паре

- m01 — «Логика высказываний» (высказывания, связки, таблицы), «Семантика: таблицы истинности» (тавтологии).
- Флеш-опросник — в начале лекции 2.