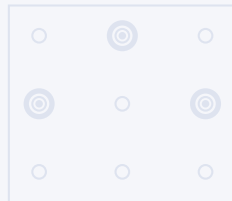


Лекция

29–30 сентября

Бинарные отношения



Бинарные отношения

Реляционный взгляд на данные описывает их в их естественной структуре.

— *Эдгар Кодд*

Что значит «связано»?

Объекты редко существуют изолированно.

- Студент записан на курс.
- Город соединён дорогой с другим городом.
- Число делится на другое число.

В каждом случае есть два объекта и связь между ними.

Множество отвечает на вопрос «что есть».

Отношение отвечает на вопрос «как связано».

Телефонная книга — это список пар: имя и номер.

Карта метро — список пар: две станции, соединённые линией.

Бинарное отношение

Определение 1

Подмножество $R \subseteq A \times B$ называется **бинарным отношением** между A и B .

При $B = A$ — отношение **на** множестве A .

Факт $(a, b) \in R$ обозначается aRb .

Связь есть, если пара принадлежит отношению.

Отношение может связывать элементы одного множества, а может — разных.

Пример

Делимость на $\mathbb{N}$: $R = \{(a, b) \mid a \text{ делит } b\}$.

Пара $(2, 6) \in R$, а пара $(3, 8) \notin R$.

Особые отношения

Три отношения на A существуют всегда.

Определение 2

- **Пустое** отношение $\emptyset$ — не связано ничего.
- **Тождественное** $\text{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ — равенство.
- **Полное** отношение $A \times A$ — связано всё со всем.

Пример

На $A = \{1, 2\}$: пустое — $\emptyset$, тождественное — $\{(1, 1), (2, 2)\}$, полное — все четыре пары.

Тождественное отношение — это обычное равенство: id_A связывает a и b ровно при $a = b$.

Его матрица — единичная, в графе — только петли.

Способы представления

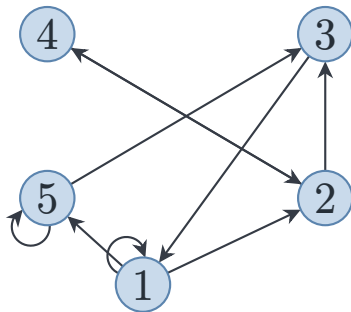
Отношение можно задать тремя эквивалентными способами.

Способ	Идея
Множество пар	$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots\}$
Матрица смежности	$M_{ij} = 1$, если $(a_i, a_j) \in R$, и 0 иначе
Ориентированный граф (<i>directed graph</i>)	вершины — элементы, ребро $a \rightarrow b$ — пара (a, b)

Все три представления несут одну и ту же информацию.

Выбор диктуется удобством задачи.

Орграф отношения



Пример

На $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Петли в вершинах 1 и 5, цикл $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Матрица смежности

Пример

То же отношение матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Строка i перечисляет, с кем связан элемент i .

Столбец j перечисляет, кто связан с элементом j .

Единичная матрица — матрица тождественного отношения: единицы ровно на диагонали.



Свойства и замыкания

Порядок и связь идей те же, что порядок и связь вещей.

— Бенедикт Спиноза

Свойства отношений

Свойства классифицируют связи.

Свойство	Смысл
Рефлексивность	каждый связан с собой
Иррефлексивность	никто не связан с собой
Симметричность	связь работает в обе стороны
Антисимметричность	взаимная связь — только для равных
Асимметричность	связь никогда не работает в обе стороны
Транзитивность	связь передаётся по цепочке

Из этих свойств собираются два главных класса отношений.

Эквивалентность и порядок — темы следующих двух лекций.

Рефлексивность

Определение 3

R называется **рефлексивным**, если каждый элемент связан с собой:

$$\forall a \in A. aRa.$$

Пример

Делимость рефлексивна: $a \mid a$ для любого a .

Отношение « $<$ » не рефлексивно: $a < a$ ложно.

Иррефлексивность

Определение 4

R называется **иррефлексивным**, если ни один элемент не связан с собой:

$$\forall a \in A. \neg(aRa).$$

Пример

Отношение « $<$ » иррефлексивно: $a < a$ ложно для всех a .

Делимость иррефлексивной не является: $a \mid a$ истинно.

Иррефлексивность — сильнее, чем «не рефлексивно»:

не рефлексивно: $\exists a \in A. \neg(aRa)$, иррефлексивно: $\forall a \in A. \neg(aRa)$.

Первое допускает петли у части элементов, второе запрещает все.

Симметричность

Определение 5

R называется **симметричным**, если aRb влечёт bRa для всех $a, b \in A$.

Пример

«Быть однокурсником» симметрично: если a однокурсник b , то и b однокурсник a .

Делимость не симметрична: $2 \mid 6$, а 6 на 2 не делится.

Антисимметричность

Определение 6

R называется **антисимметричным**, если из aRb и bRa следует $a = b$.

Пример

Делимость антисимметрична: если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $a = b$.

«Быть однокурсником» не антисимметрично.

Симметричность и антисимметричность — не противоположности.

Равенство симметрично и антисимметрично одновременно.

Асимметричность

Определение 7

R называется **асимметричным**, если aRb влечёт $\neg(bRa)$ — ни петель, ни взаимных рёбер.

Пример

Отношение $\{(1, 1), (1, 2)\}$ антисимметрично, но не асимметрично из-за петли в 1.

Строгие порядки асимметричны.

Асимметричность — это антисимметричность плюс иррефлексивность.

Антисимметричность терпит петли, асимметричность — нет.

Транзитивность

Определение 8

R называется **транзитивным**, если из aRb и bRc следует aRc .

Пример

«Быть предком» транзитивно: предок предка — предок.

«Сосед по номеру» на $\{1, 2, 3\}$ не транзитивно: $1R2$ и $2R3$, но 1 и 3 — не соседи.

Транзитивность — правило «два шага обязывают к одному».

Проверить одну тройку мало: определение требует *все* тройки.

Свойства в матрице и графе

Свойство	Матрица	Граф
Рефлексивность	единицы на диагонали	петля у каждой вершины
Иррефлексивность	нули на диагонали	петель нет
Симметричность	матрица симметрична	каждое ребро двунаправлено
Антисимметричность	нет симметричных единиц вне диагонали	нет двунаправленных рёбер
Транзитивность	путь длины 2 имеет прямое ребро	путь длины 2 имеет прямое ребро

Каждое свойство читается во всех трёх представлениях.

Выбирайте то, что нагляднее.

Обратное отношение

Определение 9

Обратное к $R \subseteq A \times B$ отношение:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A.$$

Пример

Обратное к «родитель» — «ребёнок».

Для $R = \{(1, 2), (3, 2)\}$ обратное — $\{(2, 1), (2, 3)\}$.

Матрица R^{-1} — транспонированная матрица R .

В графе все рёбра развёрнуты.

Композиция отношений

Определение 10

Композиция $S \circ R$ — все пары (a, c) , для которых существует промежуточный b :

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Порядок записи — как у функций: $S \circ R$ читается справа налево.

Пример

Если R — «родитель», то $R \circ R$ — «родитель родителя», то есть дедушка или бабушка.

Для $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ выполнено $R \circ R = \{(1, 3), (2, 4)\}$.

Степени отношения и пути

Определение 11

Степени отношения определяются рекуррентно:

$$R^1 = R, \quad R^{k+1} = R^k \circ R.$$

Пара $(a, c) \in R^k$ — это путь $a \rightarrow \dots \rightarrow c$ из k шагов в графе отношения.

Пример

Для «родитель»: R^2 — бабушки и дедушки, R^3 — прародители.

Степени — мост от алгебры отношений к графам: достижимость за k шагов.

Замыкания

Определение 12 (Рефлексивное замыкание)

Отношение называется **рефлексивным замыканием** R и обозначается $R^=$, если оно получено из R добавлением всех недостающих петель:

$$R^= = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Определение 13 (Симметричное замыкание)

Отношение называется **симметричным замыканием** R , если оно получено из R добавлением обратной пары (b, a) к каждой паре $(a, b) \in R$: $R \cup R^{-1}$.

Минимальность: ровно те пары, которых не хватает.

Пример: у $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ рефлексивное замыкание добавляет $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$, а симметричное — $(2, 1), (3, 2)$.

Транзитивное замыкание

Определение 14

Транзитивное замыкание R^+ — все пары, достижимые за один или более шагов:

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

Пример

«Родитель» разворачивается в «предок»: R^2 — бабушки и дедушки, R^3 — прапродители, R^+ — все предки.

Замыкание по всем трём свойствам сразу — минимальное отношение эквивалентности, содержащее R (об этом — следующая лекция).

Один проход недостаточен

Одного прохода недостаточно.

Добавленные рёбра порождают новые цепочки, а те — новые рёбра.

Пример

Для $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ первый проход добавит $(1, 3)$ и $(2, 4)$.

Но $(1, 3)$ — новое ребро, и пара $(1, 3), (3, 4)$ требует второго прохода: появится $(1, 4)$.

Число проходов растёт с длиной самых длинных путей.

Алгоритм Уоршелла

Алгоритм Уоршелла вычисляет R^+ по матрице смежности за $O(n^3)$.

1. Для каждой вершины k от 1 до n переберём все пары (i, j) .
 - Если $M_{ik} = 1$ и $M_{kj} = 1$, полагаем $M_{ij} := 1$.

На итерации k добавляются пути, проходящие через вершину k .

Пример

$R = \{(1, 2), (2, 3)\}$: на шаге $k = 2$ появится пара $(1, 3)$.

Тот же перебор вершин — в алгоритме Флойда–Уоршелла для кратчайших путей.

Замыкание и код

Транзитивное замыкание — это достижимость.

- Рекомендации подписок: если A подписан на B , а B — на C , системе есть что предложить A .
- Запрос «все предки человека» — транзитивное замыкание отношения «родитель».
- В SQL для этого нужны рекурсивные CTE (WITH RECURSIVE).

Отношение задаёт структуру связей, замыкание — всё, что из них следует по цепочкам.

Лекция 4: что мы поняли?

- Отношение — множество пар. Те же данные несут матрица смежности и ориентированный граф.
- Свойства — рефлексивность, симметричность, транзитивность и их строгие варианты — читаются в любом представлении.
- Композиция соединяет отношения, степени — пути в графе.
- Замыкание добавляет минимально недостающие пары. Транзитивное замыкание — достижимость, алгоритм Уоршелла за $O(n^3)$.
- Из свойств собираются главные классы: эквивалентности и порядки.

Вопросы для самопроверки

1. Для $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ на $\{1, 2, 3\}$ проверьте рефлексивность, симметричность и транзитивность.
2. Постройте отношение на $\{1, 2, 3\}$, рефлексивное и симметричное, но не транзитивное. Выпишите его матрицу.
3. Чем антисимметричность отличается от асимметричности? Приведите отношение, антисимметричное, но не асимметричное.
4. Постройте транзитивное замыкание $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, b)\}$.
5. Почему одного прохода добавления пар для транзитивного замыкания недостаточно?
6. Как по матрице смежности увидеть, что отношение симметрично?

Чтение к следующей паре

- m05 — «Бинарные отношения», «Свойства отношений», «Замыкания отношений».
- Флеш-опросник — в начале лекции 5.
- Контрольная 1 (высказывания, кванторы, методы доказательств, множества) — на следующей неделе, на отдельной паре.