

Лекция

6–7 октября

Отношение эквивалентности

Константин Чухарев

Дискретная математика — Осень 2026



Отношение эквивалентности

И вещи, совпадающие друг с другом, равны между собой.

— Евклид

Что считать одним и тем же?

Отношение эквивалентности отвечает на вопрос, что считать одним и тем же.

Образец — обычное равенство: число равно только самому себе.

Эквивалентность — то же «равно», но по выбранному признаку.

Пример

Записи $10 \bmod 3$, $7 \bmod 3$ и $13 \bmod 3$ выглядят по-разному.

По признаку остатка это одно и то же.

Равенство различает каждый элемент — это самая мелкая эквивалентность.

Эквивалентность грубее: она склеивает группы элементов в классы.

Определение

Определение 1

Бинарное отношение $\sim$ на A называется **отношением эквивалентности**, если оно:

- **Рефлексивно:** $a \sim a$.
- **Симметрично:** $a \sim b$ влечёт $b \sim a$ для всех $a, b \in A$.
- **Транзитивно:** $a \sim b$ и $b \sim c$ влекут $a \sim c$ для всех $a, b, c \in A$.

Пример

На $\{1, 2, 3\}$ отношение $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ рефлексивно и симметрично.

Но не транзитивно: $(1, 2)$ и $(2, 3)$ есть, а $(1, 3)$ — нет.

Транзитивность — то, что не даёт классам пересекаться: без неё классы перестают быть аккуратными группами.

Класс эквивалентности

Определение 2 (Класс эквивалентности)

Множество всех элементов, эквивалентных a , называется **классом эквивалентности** и обозначается $[a]$:

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Любой элемент класса называется его **представителем**.

Пример

Сравнение по модулю 3 на $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$: $[0] = \{0, 3\}$, $[1] = \{1, 4\}$, $[2] = \{2, 5\}$.

Свойства классов

Теорема 1 (Свойства классов эквивалентности)

- $a \in [a]$.
- $[a] = [b]$ тогда и только тогда, когда $a \sim b$.
- $[a] \cap [b] = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\neg(a \sim b)$.

Доказательство

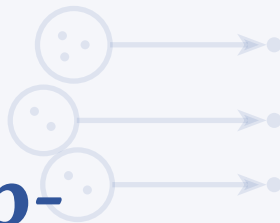
$a \in [a]$ — рефлексивность.

Если $a \sim b$, то $[a] = [b]$ по симметрии и транзитивности. Обратно — из $[a] = [b]$ и $a \in [a]$ следует $a \in [b]$, то есть $a \sim b$.

Третье — контрапозиция второго.

Классы либо совпадают, либо не пересекаются — за это отвечает транзитивность.

Разбиения и фактор- множество



*Математика — это искусство давать одно и то же имя
разным вещам.*

— Анри Пуанкаре

Разбиение

Определение 3

Разбиение (*partition*) множества A — набор непустых попарно непересекающихся подмножеств, покрывающих A .

Части разбиения называют **блоками**.

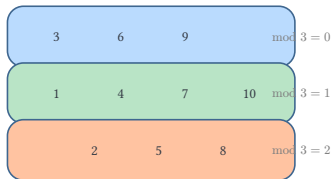
Пример

$\{\{0, 2, 4, \dots\}, \{1, 3, 5, \dots\}\}$ — разбиение $\mathbb{N}$ на чётные и нечётные числа.

Классы эквивалентности попарно не пересекаются и покрывают всё множество.

Разбиение [2]

На рисунке — разбиение $\{1, \dots, 10\}$ на классы по остаткам при делении на 3.



Теорема о разбиении

Теорема 2 (Классы и разбиения)

Множество классов эквивалентности образует разбиение A .

Обратно: каждое разбиение задаёт эквивалентность « $a \sim b$ — в одной части».

Доказательство

Классы покрывают A ($a \in [a]$ для каждого a) и попарно не пересекаются — по свойствам классов.

Обратно: отношение «в одной части разбиения» рефлексивно, симметрично и транзитивно по построению.

Эквивалентность и разбиение — две записи одной информации, как пары, матрица и граф у отношения.

Фактор-множество

Определение 4

Множество всех классов эквивалентности — **фактор-множество**:

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Пример

Для сравнения по модулю 3 на $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$: $A/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$ — элемент фактор-множества целый класс. Крайние случаи: равенство даёт одноэлементные классы $\{\{a\}\}$, полное отношение — один класс $\{A\}$.

Фактор-множество грубее исходного: эквивалентность решает, сколько различий осталось.

Рациональные числа как классы

Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{6}$ — разные записи одного числа: это фактор-множество в чистом виде.

Определение 5

На парах $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ положим:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

Пример

Класс $[(1, 2)] = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (-1, -2), \dots\}$ — это и есть рациональное число $\frac{1}{2}$.

$\mathbb{Q}$ — фактор-множество пар по этому отношению.

Дробь — имя класса.

Проверка эквивалентности $a \cdot d = b \cdot c$ — перекрёстное умножение из школы.

Корректность операций

Сложение классов определяется через представителей:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)].$$

Теорема 3 (Корректность)

Результат не зависит от выбора представителей.

Доказательство

Возьмём другие представители: $(a', b') \in [(a, b)]$ и $(c', d') \in [(c, d)]$, то есть $a \cdot b' = b \cdot a'$ и $c \cdot d' = d \cdot c'$.

Проверим, что $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$ — перекрёстным умножением:

Корректность операций [2]

$$\begin{aligned}(ad + bc) \cdot b'd' &= (a \cdot b') \cdot d \cdot d' + (c \cdot d') \cdot b \cdot b' \\ &= (b \cdot a') \cdot d \cdot d' + (d \cdot c') \cdot b \cdot b' \\ &= bd \cdot (a'd' + b'c').\end{aligned}$$

Знаменатели ненулевые по определению пар, значит, оба представителя дают один класс.

Для умножения — тот же ход.

Корректность (*well-defined*) — главное требование к операциям на классах.

Без неё арифметика дробей зависела бы от того, какую запись взяли.

Сравнимость по модулю m

Пример

$a \sim b$, если $a \equiv b \pmod{m}$, то есть m делит $a - b$.

Классы — вычеты $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$.

Сложение и умножение корректны на классах вычетов: результат не зависит от представителя.

Это основа модульной арифметики и криптографии.

Примеры эквивалентностей

Пример

- **Изоморфизм графов:** $G \sim H$, если есть биекция вершин, сохраняющая рёбра. Класс — «непомеченный граф».
- **Равномощность:** $X \sim Y$, если есть биекция между X и Y . Класс — кардинальное число.
- **Одинаковый год рождения:** класс — группа студентов одного года.

Один и тот же вопрос «что считать одним и тем же» работает для чисел, множеств и графов.

Равномощность вернётся в лекции о счётности — там она станет инструментом измерения.

Группировка данных

Группировка по значению атрибута разбивает записи на классы эквивалентности.

- GROUP BY city в SQL — классы записей с одинаковым городом.
- Кластеризация — последовательность всё более грубых разбиений по порогу близости.
- Дендрограмма — дерево слияний кластеров.

Каждый класс — множество записей с одинаковым значением атрибута.

Классы попарно не пересекаются и покрывают всю выборку.

Хеш-функции

Хеш-функция $h : K \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$ задаёт на ключах отношение «попасть в одну корзину».

Каждая корзина — класс эквивалентности.

Коллизия — два различных ключа в одном классе.

Если $|K| > m$, коллизии неизбежны.

Эквивалентность состояний

На состояниях автомата определяется отношение неразличимости.

Определение 6

$p \sim q$, если для любой входной строки w автомат из p принимает w тогда и только тогда, когда принимает из q .

Склеивание эквивалентных состояний даёт *минимальный* автомат.

Это отношение эквивалентности — к лекции об автоматах.

Эквивалентность в коде

Трейт `PartialEq` в Rust — оператор `==`.

Документация требует симметричности и транзитивности, но не рефлексивности.

Пример

`f64` реализует `PartialEq`, но не `Eq`: `NaN != NaN`.

`Eq` — маркер: пообещать, что $a = a$ всегда верно.

Равенство по элементам на множестве удовлетворяет аксиомам эквивалентности.

Поэтому для него `Eq` реализуем.

Лекция 5: что мы поняли?

- Эквивалентность — рефлексивность, симметричность, транзитивность. «Равно» по выбранному признаку.
- Классы либо совпадают, либо не пересекаются. Классы образуют разбиение, разбиение задаёт эквивалентность.
- Фактор-множество — множество классов: дроби как классы пар, вычеты как классы чисел.
- Операции на классах обязаны быть корректны — не зависеть от представителя.
- Второй главный класс отношений выстраивает иерархию вместо групп — это порядок, следующая лекция.

Вопросы для самопроверки

1. Докажите: отношение aRb , если $a + b$ чётно, — эквивалентность на $\mathbb{Z}$. Опишите классы.
2. Пусть $A \sim B$, если $J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \geq \theta$ для порога θ . Является ли такое θ -подобие эквивалентностью? Проверьте транзитивность.
3. На булеане $\{x, y, z\}$ задано отношение $A \sim B$, если $|A| = |B|$. Докажите, что это эквивалентность, и выпишите все классы.
4. Придумайте разбиение $\mathbb{Z}$ на три класса и опишите эквивалентность, которую оно задаёт.
5. Почему определение $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$ требует проверки корректности?

Чтение к следующей паре

- m05 — «Отношение эквивалентности», «Классы эквивалентности», «Теорема о разбиении».
- Флеш-опросник — в начале лекции 6.