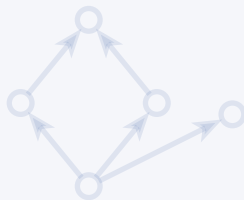


Лекция

13–14 октября

# Отношение порядка



# Частичный порядок

*Порядок — это расположение вещей, дающее каждой своё место.*

*— Августин Блаженный*

## Что раньше?

Одни вещи предшествуют другим:

- Сборка проекта ждёт компиляции зависимостей.
- Версия библиотеки обязана быть совместима с той, что уже используется.
- Документ в системе контроля версий — наследник предыдущего состояния.

Задача А должна быть выполнена раньше задачи Б.

Это и есть отношение порядка.

В отличие от эквивалентности, порядок не группирует, а выстраивает.

Два элемента могут быть несравнимы.

# Частичный порядок

## Определение 1 (Частичный порядок)

Бинарное отношение  $\preceq$  на  $A$  называется **частичным порядком**, если оно:

- **Рефлексивно**:  $a \preceq a$  для всех  $a \in A$ .
- **Антисимметрично**: из  $a \preceq b$  и  $b \preceq a$  следует  $a = b$ .
- **Транзитивно**: из  $a \preceq b$  и  $b \preceq c$  следует  $a \preceq c$ .

Пара  $(A, \preceq)$  называется **ЧУМ** (частично упорядоченное множество).

## Пример

Делимость на  $\mathbb{N}$ :  $a \preceq b$ , если  $a \mid b$ .

2 и 3 несравнимы: ни одно не делит другое.

# Строгий порядок

Строгий порядок — аналог  $<$ .

## Определение 2 (Строгий порядок)

Бинарное отношение  $<$  на  $A$  называется **строгим порядком**, если оно:

- **Иррефлексивно**:  $\neg(a < a)$ .
- **Асимметрично**: из  $a < b$  следует  $\neg(b < a)$ .
- **Транзитивно**: из  $a < b$  и  $b < c$  следует  $a < c$ .

## Пример

- $<$  на числах:  $1 < 2$  и  $2 < 3$  влечёт  $1 < 3$ .  $1 < 1$  ложно.
- Строгое включение:  $\{1\} \subset \{1, 2\}$  — тоже строгий порядок.

$a < b$  тогда и только тогда, когда  $a \preceq b$  и  $a \neq b$ : антисимметричность — свойство  $\preceq$ , асимметричность — свойство  $<$ .

# Линейный порядок

Частичный порядок допускает несравнимые пары.

Линейный порядок несравнимых пар не допускает.

## Определение 3 (Линейный порядок)

Частичный порядок называется **линейным** (*total order*), если любая пара элементов сравнима:  $\forall a, b : (a \preceq b) \vee (b \preceq a)$ .



$(\mathbb{N}, \leq)$  и  $(\mathbb{R}, \leq)$  — линейные, делимость — лишь частичная.

# Несравнимость — это независимость

Несравнимость часто воспринимают как недостаток.

На деле несравнимость — это информация о независимости.

Если  $a$  и  $b$  несравнимы — между ними нет зависимости.

Их можно выполнять в любом порядке или параллельно.

## Пример

- Задачи «написать отчёт» и «собрать данные» независимы.
- Компилятор собирает несравнимые модули параллельно (флаг -j).

Несравнимость — источник параллелизма.

## Порядок в коде: PartialOrd

В Rust частичный порядок выражается трейтом `PartialOrd`.

Метод `partial_cmp` возвращает `Option<Ordering>`.

Значение `None` — ровно математическая несравнимость.

Трейт `Ord` добавляет тотальность: сравнимы всегда.

### Пример

Включение подмножеств — частичный порядок:  $\{1\}$  и  $\{2\}$  несравнимы.

Поэтому включение выражается через `PartialOrd`, а не через `Ord`.

# Порядки и не-порядки

## Пример

- $\leq$  на  $\mathbb{N}$ : рефлексивно, антисимметрично, транзитивно — порядок. Любые два числа сравнимы — линейный порядок.
- Делимость  $a \mid b$  на  $\mathbb{N}$ : порядок, но 2 и 3 несравнимы — только частичный.
- Включение  $\subseteq$  на  $\mathcal{P}(A)$ : порядок,  $\{1\}$  и  $\{2\}$  несравнимы.
- «Разность кратна 3» на  $\mathbb{Z}$ : рефлексивно, транзитивно и симметрично — это эквивалентность, а не порядок.
- Совместимость версий пакетов: рефлексивно и транзитивно, но не антисимметрично — **предпорядок**.

Рефлексивность + транзитивность + симметричность дают эквивалентность.

Рефлексивность + транзитивность + антисимметричность дают порядок.

Без антисимметричности остаётся предпорядок — как совместимость версий.

# Топологическая сортировка

Частичный порядок моделирует зависимости.

Чтобы составить расписание, его разворачивают в линейный.

## Определение 4 (Топологическая сортировка)

Линейный порядок  $\leq$  на ЧУМ, такой что  $a \preceq b$  влечёт  $a \leq b$ , называется **топологической сортировкой**.

## Пример

«ОП»  $\preceq$  «Алгоритмы» и «Структуры данных». «СД»  $\preceq$  «Базы данных».

Допустимый порядок: ОП, СД, Алг, БД.

Несравнимые элементы получают произвольный порядок — разные сортировки разрешают свободу по-разному.

# Существование

## Теорема 1

Любое конечное ЧУМ имеет хотя бы одну топологическую сортировку.

### Доказательство

В конечном ЧУМ всегда есть минимальный элемент.

Выбираем минимальный элемент, выводим его и удаляем из множества, затем повторяем шаг для оставшихся элементов.

Когда выводим элемент, все его предшественники уже удалены.

«Снять минимальный» никогда не застревает.

В циклическом графе топологической сортировки не существует: цикл разорвать линейным порядком нельзя.

## Алгоритм Кана

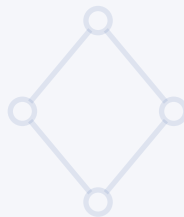
1. Посчитать число входящих рёбер у каждой вершины.
2. Положить в очередь все вершины с нулевым входом.
3. Пока очередь не пуста:
  - Извлечь вершину и вывести её.
  - Уменьшить вход каждого соседа.
  - Если вход соседа стал нулевым, добавить его в очередь.
4. Если вывели не все вершины, в графе есть цикл.

Сложность —  $O(V + E)$ .

Результат — порядок сборки или отказ при цикле.

Применения: сборка модулей, расписания (метод PERT), CI/CD пайплайны.

Несравнимые модули собираются параллельно.



# Диаграммы Хассе и решётки

*Порядок — первый закон небес.*

— Александр Поуп

# Диаграмма Хассе

Диаграмма Хассе — «скелет» частичного порядка.

## Определение 5 (Построение)

1. Убрать все петли (рефлексивность подразумевается).
2. Убрать рёбра, следующие из транзитивности. Остаётся только отношение покрытия.
3. Расположить  $a$  выше  $b$ , когда  $b \prec a$ .
4. Нарисовать линии между соседними по покрытию элементами.

Каждое сокращение безопасно.

Убранное восстанавливается по аксиомам порядка.

Хассе рисует транзитивное сокращение порядка — минимальный граф с той же транзитивной оболочкой.

# Покрытие

## Определение 6

$a$  покрывает  $b$ , если  $b \prec a$  и между ними нет промежуточного элемента.

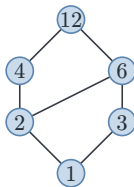
Отношение покрытия — ровно те пары, которые нельзя вывести из транзитивности.

## Пример

В делителях числа 12 ребро  $1 - 4$  не рисуется.

Хотя  $1 \mid 4$  верно, связь следует через 2:  $1 \mid 2 \mid 4$ .

## Делители числа 12



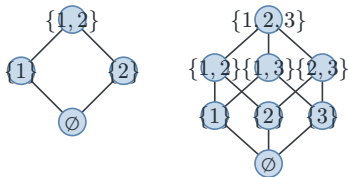
### Пример

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  с отношением делимости.

1 — внизу, 12 — вверху.

2 и 3 несравнимы: между ними нет ребра.

## Булева решётка



Подмножества  $\{1, 2\}$  и  $\{1, 2, 3\}$  по включению: слева — квадрат  $B_2$ , справа — куб  $B_3$ .

Ребро диаграммы Хассе булеана — добавить ровно один элемент.

## Минимальные и максимальные

Экстремальные элементы обобщают «первый» и «последний» на случай, когда порядок не линеен.

### Определение 7 (Минимальный и максимальный)

$m$  **минимален**, если нет элемента строго меньше:

$$\nexists a \in A : a \prec m.$$

$m$  **максимален**, если нет элемента строго больше:

$$\nexists a \in A : m \prec a.$$

Эти свойства *локальны*.

Минимальный элемент может оставаться несравнимым с остальными.

# Наименьший и наибольший

Вторая пара свойств глобальна: элемент сравним со всеми.

## Определение 8 (Наименьший и наибольший)

$m$  **наименьший**, если он меньше (нестрого) всех:

$$\forall a \in A : m \preceq a.$$

$m$  **наибольший**, если он больше (нестрого) всех:

$$\forall a \in A : a \preceq m.$$

## Пример

В  $(\{1, 2, 3\}, \leq)$  наименьший — 1, наибольший — 3.

В ЧУМ  $(\{2, 3, 6\}, |)$  наименьшего нет: 2 и 3 несравнимы, хотя наибольший — 6.

## Сравнение экстремальных элементов

| Понятие      | Единственен? | В конечном ЧУМ? | Сравним со всеми? |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|
| Минимальный  | нет          | да              | нет               |
| Максимальный | нет          | да              | нет               |
| Наименьший   | да           | не гарантирован | да                |
| Наибольший   | да           | не гарантирован | да                |

В конечном ЧУМ минимальные и максимальные элементы существуют всегда.

Наименьший и наибольший — не обязательно.

## Пример: делители

Рассмотрим  $(\{2, 3, 4, 6, 12\}, |)$  — без единицы.

### Пример

- Минимальные элементы: 2 и 3.
- Максимальный: 12.
- Наименьшего нет: 2 и 3 несравнимы.
- Наибольший: 12.

Добавление 1 вниз превратит множество в решётку делителей 12 — к решёткам вернёмся через несколько слайдов.

## Верхние и нижние грани

Экстремальные элементы характеризуют всё ЧУМ.

Грани характеризуют подмножество.

### Определение 9 (Грани)

Пусть  $S \subseteq A$ .

$u$  — **верхняя грань** (*upper bound*)  $S$ , если  $s \preceq u$  для всех  $s \in S$ .

$l$  — **нижняя грань**  $S$ , если  $l \preceq s$  для всех  $s \in S$ .

### Пример

В  $D_{12}$  для  $S = \{2, 3\}$ : верхние грани — 6 и 12, нижние — 1.

Для  $S = \{4, 6\}$ : верхняя грань — 12, нижние — 1 и 2.

# Супремум и инфимум

## Определение 10 (Супремум и инфимум)

**Супремум**  $S$  — наименьшая верхняя грань, обозначается  $\sup S$ .

**Инфимум**  $S$  — наибольшая нижняя грань, обозначается  $\inf S$ .

Для пары  $\{a, b\}$  супремум называют `join`, инфимум — `meet`.

## Пример

В делителях 12 с делимостью для пары  $\{2, 3\}$ : верхние грани — 6 и 12, нижняя — 1.

Значит, супремум — 6, инфимум — 1.

## Супремум может не существовать

### Пример

ЧУМ из трёх элементов  $\{a, b, c\}$ , где  $a \prec b$  и  $a \prec c$ , а  $b$  и  $c$  несравнимы.

У пары  $\{b, c\}$  нет верхней грани: элемент над обоими в множестве не встречается.

Значит,  $b \vee c$  не существует.

Супремум и инфимум единственны, когда существуют.

Но в произвольном ЧУМ они могут отсутствовать.

# Инфимум без наименьшего

У бесконечного множества наименьшего элемента может не быть.

## Пример

$S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  — числа  $\frac{1}{n}$  при  $n \geq 1$ .

Наименьшего элемента нет: всегда есть число меньше.

Но инфимум есть — это 0.

В  $\mathbb{R}$  супремум множества  $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$  равен  $\sqrt{2}$ , хотя  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

В самом  $\mathbb{Q}$  супремума этого множества не существует вовсе — вот чем полнота  $\mathbb{R}$  отличается от плотности  $\mathbb{Q}$ .

Супремум — не то же самое, что максимум: максимум обязан принадлежать множеству, супремум — лишь наилучшая граница.

# Решётка

Супремум и инфимум есть не у всякой пары — решётка это ЧУМ, где они есть всегда.

## Определение 11 (Решётка)

ЧУМ называется **решёткой**, если у каждой пары элементов существуют и супремум (join), и инфимум (meet).

## Пример

- Булеан с включением: join — объединение, meet — пересечение.
- Делители с НОД и НОК: join — НОК, meet — НОД.
- Линейный порядок: join — максимум, meet — минимум.

Решётка не требует линейности: несравнимость допускается, но каждая пара имеет точные грани.

## ЧУМ, не являющееся решёткой

### Пример

$(\{2, 3, 4, 6, 12\}, |)$  — не решётка.

У пары  $\{2, 3\}$  нет нижней грани в этом множестве.

Инфимум был бы 1, но единицы в множестве нет.

Добавление 1 превращает множество в  $D_{12}$  — решётку делителей 12.

Одного недостающего элемента хватило, чтобы структура «дотянулась» до решётки.

# Дистрибутивная решётка

## Определение 12 (Дистрибутивная решётка)

Решётка **дистрибутивна**, если  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  для всех  $a, b, c$ .

Здесь  $\wedge$  — meet,  $\vee$  — join.

## Пример

- Булеан с включением:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  и двойственное тождество.
- Делители 12 с НОД и НОК дистрибутивны.

# Булева алгебра

## Определение 13 (Булева алгебра)

Булева алгебра — дистрибутивная решётка с наименьшим 0, наибольшим 1 и дополнением:  $a \wedge \bar{a} = 0$  и  $a \vee \bar{a} = 1$ .

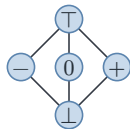
## Пример

- Булеан:  $0 = \emptyset$ ,  $1 = A$ , дополнение —  $\bar{S}$ .
- Двухэлементная  $\{0, 1\}$  с  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  — логика высказываний.

Логика, множества и схемы — одна дистрибутивная решётка с дополнением в разных записях.

## Решётки в коде: знаки

Решётка из статического анализа — знаки чисел.



Каждое значение заменяется знаком:  $+$ ,  $-$ ,  $0$ .

Слияние двух ветвей условного оператора берёт супремум их знаков.

Если после ветвей знак  $x$  — только  $+$  или  $-$ , деление на  $x$  безопасно.

Абстрактная интерпретация — свойства программы как элементы решётки.

## Лекция 6: что мы поняли?

- Частичный порядок — рефлексивность, антисимметричность, транзитивность. Несравнимость — это независимость и источник параллелизма.
- Диаграмма Хассе рисует покрытие: петли и транзитивные рёбра убраны.
- Минимальный не то же, что наименьший. Супремум не то же, что максимум.
- Решётка даёт каждой паре `join` и `meet`. Булева алгебра — дистрибутивная решётка с дополнением.
- Топологическая сортировка разворачивает порядок в цепочку действий — алгоритм Кана за  $O(V + E)$ .
- Порядок отвечает на вопрос «что раньше». Следующий вопрос — «что во что переходит»: функции.

## Вопросы для самопроверки

---

1. Проверьте, что делимость является частичным порядком на натуральных числах.
2. Приведите пример ЧУМ с двумя минимальными элементами и без наименьшего.
3. Чем супремум отличается от максимума? Приведите пример множества, где супремум есть, а максимума нет.
4. Является ли булеан  $\{1, 2, 3\}$  с включением решёткой? Дистрибутивной?
5. Почему частичный порядок допускает параллелизм, а линейный — нет?
6. Нарисуйте диаграмму Хассе для делителей числа 18.
7. Докажите, что в конечном ЧУМ топологическая сортировка существует всегда.

## Чтение к следующей паре

---

- m08 — «Частичный порядок», «Диаграммы Хассе», «Экстремальные элементы», «Решётки».
- Флеш-опросник — в начале лекции 7.