

Лекция

3–4 ноября

Логика высказываний



Семантика и следствие

Логика не учение, а отражение мира.

— Людвиг Витгенштейн

Связки: краткое повторение

В сентябре связки и таблицы работали как инструмент.

Теперь — строгая семантика: что значит «формула истинна» и что значит «из чего следует что».

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Приоритет связок: $\neg$, затем $\wedge$, затем $\vee$, затем $\rightarrow$, затем $\leftrightarrow$.

Импликация: одна строка, требующая внимания

Импликация ложна ровно в одной строке: антецедент (посылка) истинен, консеквент (заключение) ложен.

Обещание «если пойдёт дождь, возьму зонт» нарушено только дождём без зонта.

Если посылка ложна, импликация истинна при любом заключении — *вакуумная истинность*. Зеркальное правило *verum ex quolibet sequitur*: импликация с истинным заключением истинна при любом антецеденте. Обещание нельзя нарушить, пока условие не наступило.

Отрицание импликации — конъюнкция:

$$\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

Частая ошибка — пронести отрицание внутрь и получить $P \rightarrow \neg Q$.

Интерпретация

Определение 1 (Интерпретация)

Интерпретация — функция $\nu : V \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$, сопоставляющая каждой переменной множества V истинностное значение.

Пример

Для $P \wedge Q$ интерпретация $\nu(P) = \mathbf{T}$, $\nu(Q) = \mathbf{F}$ даёт значение $\mathbf{F}$.

Другой набор значений — другая интерпретация.

Интерпретация — строка будущей таблицы истинности.

Для n переменных их ровно 2^n : проверка формулы — перебор всех.

Оценка формулы

Значение составной формулы вычисляется по структуре — от атомов к целому.

Определение 2 (Оценка формулы)

Интерпретация ν распространяется на все формулы по связкам:

$$\nu(\neg\alpha) = \text{не } \nu(\alpha)$$

$$\nu(\alpha \wedge \beta) = \nu(\alpha) \text{ и } \nu(\beta)$$

$$\nu(\alpha \vee \beta) = \nu(\alpha) \text{ или } \nu(\beta)$$

$$\nu(\alpha \rightarrow \beta) = \text{ложь только при } \nu(\alpha) = \mathbf{T}, \nu(\beta) = \mathbf{F}$$

Значение $\alpha \leftrightarrow \beta$ — сокращение для $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Значение целого собирается из значений частей — *композициональность*.

Именно она делает таблицу истинности возможной.

Таблица истинности

Пример (Полный расчёт)

Формула $(P \vee Q) \wedge \neg P$:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$
F	F	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	T	F	F
T	T	T	F	F

Столбцы — атомы, промежуточные подформулы и результат.

Таблица — исчерпывающая проверка: каждая строка одна интерпретация.

Формула — тавтология, если проверены *все* строки.

Цена перебора

Рост числа строк — экспоненциальный.

Переменных n	Строк 2^n
2	4
5	32
10	1024
20	$\approx 10^6$

Уже при двадцати переменных прямая таблица — миллион строк.

Как искать выполнимость быстрее перебора — задача SAT: ей посвящён модуль о булевой алгебре.

Классы формул

Определение 3 (Классы формул)

- **Тавтология** — формула, истинная при каждой интерпретации.
- **Противоречие** — формула, ложная при каждой интерпретации.
- **Контингентная** — истинная при одних интерпретациях и ложная при других.
- **Выполнимая** (*satisfiable*) — истинна хотя бы при одной интерпретации.

Интерпретация, на которой формула истинна, — её *модель*.

Пример

- $P \vee \neg P$ — тавтология (закон исключённого третьего).
- $P \wedge \neg P$ — противоречие.
- $P \wedge Q$ — контингентная: выполняема, но не тавтология.

Классы и отрицание

Класс формулы читается по её таблице — «паспорт» формулы.

Теорема 1 (Двойственность классов)

- φ — тавтология тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ — противоречие.
- φ выполнима тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ — не тавтология.

Доказательство

φ истинна на всех интерпретациях — тогда $\neg\varphi$ ложна на всех.

Модель у φ есть — значит, на ней $\neg\varphi$ ложна, и тавтологией $\neg\varphi$ быть не может.

Проверить, что φ — тавтология, можно через невыполнимость $\neg\varphi$.

Этот ход работает и для следствия — ниже.

Логическая эквивалентность

Определение 4 (Логическая эквивалентность)

Формулы α и β **логически эквивалентны**, обозначается $\alpha \equiv \beta$, если они принимают одинаковые значения на каждой интерпретации.

Иначе: $\alpha \equiv \beta$ — это тавтологичность $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Пример

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

Обе формулы ложны только в строке $\text{Т} \rightarrow \text{Ф}$ — проверяется таблицей.

Эквивалентные формулы взаимозаменяемы.

Эквивалентность — инструмент переписывания.

Принцип подстановки

Теорема 2 (Принцип подстановки)

Если $\alpha \equiv \beta$ и χ — формула, содержащая α как подформулу, то замена α на β в χ даёт формулу, эквивалентную χ .

Доказательство

Индукция по построению χ .

База. χ совпадает с α : замена даёт β , эквивалентность дана условием.

Шаг. Связка пересчитывает значение из значений частей, а части по индукционному предположению эквивалентны заменённым — значит, значение целого не меняется.

Применение закона к подформуле не требует перепроверки всей формулы.

Законы логики

Закон	Формулы
Идемпотентность	$P \vee P \equiv P, \quad P \wedge P \equiv P$
Коммутативность	$P \vee Q \equiv Q \vee P, \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Ассоциативность	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Дистрибутивность	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Поглощение	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P, \quad P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Двойное отрицание	$\neg\neg P \equiv P$
Тождество	$P \vee \mathbf{F} \equiv P, \quad P \wedge \mathbf{T} \equiv P$
Доминирование	$P \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}, \quad P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Дополнение	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{T}, \quad P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$

Каждый закон проверяется таблицей — четыре или восемь строк.

Законы де Моргана

Теорема 3 (Законы де Моргана)

- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$
- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q.$

Таблицей проверили в первом модуле — теперь де Морган рабочий закон: принцип подстановки разрешает применять его к любой подформуле.

Пример

Двойное применение внутри большой формулы:

$$\neg(P \wedge (Q \vee R)) \equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R).$$

Таблица на восемь строк не понадобилась — два шага подстановки.

Упрощение формул

Цепочка эквивалентностей отвечает на вопрос о классе формулы.

Пример (Тавтология или нет)

$$\begin{aligned} & (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\ \equiv & P \wedge (Q \vee \neg Q) && \text{дистрибутивность} \\ \equiv & P \wedge \mathbf{T} && \text{исключённое третье} \\ \equiv & P && \text{тождество} \end{aligned}$$

Формула эквивалентна P : выполнима, но не тавтология.

Законы — не справка, а рабочий инструмент: переписал — упростил — узнал класс.

Следующий шаг — канонический вид, нормальные формы.

Логическое следствие

Определение 5 (Логическое следствие)

Формула ψ — **логическое следствие** формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, обозначается $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, если каждая интерпретация, на которой истинны все φ_i , истинна и на ψ .

Пример

$P \rightarrow Q, P \models Q$ — *modus ponens*: при истинных посылке и импликации заключение обязано быть истинным.

$P \wedge Q \models P$ — верно, а $P \models P \wedge Q$ — нет: интерпретация **T**, **F** даёт контрпример.

Опровергнуть следствие — предъявить одну интерпретацию.

Подтвердить — перебрать все 2^n .

Следствие и невыполнимость

Теорема 4 (Следствие через невыполнимость)

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ тогда и только тогда, когда формула

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$$

невыполнима.

Доказательство

Контрпример к следствию — интерпретация, на которой все φ_i истинны, а ψ ложна.

Ровно на таких интерпретациях конъюнкция $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ истинна.

Контрпримеров нет — значит, конъюнкция невыполнима, и обратно.

Проверить следствие — поискать контрпример: так работают SAT-решатели.

Семантическая теорема о дедукции

Знакомый математический ход — предположить посылки, вывести заключение и освободиться от допущений.

Теорема 5 (Семантическая теорема о дедукции)

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ тогда и только тогда, когда импликация $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ — тавтология.

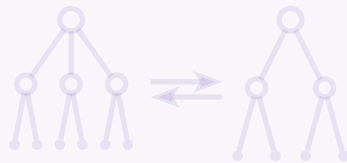
Доказательство

По определению следствия нет интерпретации, где посылки истинны, а ψ ложна.

Импликация ложна ровно на таких интерпретациях.

Значит, «нет контрпримера» — одно и то же для следствия и для импликации.

В следующей лекции этот приём станет правилом вывода.



Нормальные формы

| *«Снег бел» истинно тогда и только тогда, когда снег бел.*

— *Альфред Тарский*

Литералы и канонический вид

Определение 6 (Литерал)

Литерал — атомарная переменная или её отрицание: P , $\neg P$.

Зачем канонический вид:

- две формулы сравниваются механически: привёл к форме — сравнил;
- выполнимость и невыполнимость — вход алгоритмов;
- нормализованные формулы — материал для схем и SAT.

Канонический вид превращает сравнение формул в сравнение текстов.

Дизъюнктивная нормальная форма

Определение 7 (ДНФ)

Формула находится в **дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ)**, если она — дизъюнкция конъюнкций литералов:

$$(l_{1,1} \wedge \dots \wedge l_{1,k_1}) \vee \dots \vee (l_{n,1} \wedge \dots \wedge l_{n,k_n}).$$

Пример

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ — ДНФ.

$\neg(P \vee Q)$ — не ДНФ: отрицание стоит над скобкой.

ДНФ собирает условие истинности «снизу»: дизъюнкция случаев, в каждом — набор литералов.

Конъюнктивная нормальная форма

Определение 8 (КНФ)

Формула находится в **конъюнктивной нормальной форме** (КНФ), если она — конъюнкция дизъюнкций литералов:

$$(l_{1,1} \vee \dots \vee l_{1,k_1}) \wedge \dots \wedge (l_{n,1} \vee \dots \vee l_{n,k_n}).$$

Пример

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — КНФ.

Дизъюнкция литералов называется **дизъюнктом** (*clause*).

Двойственность: ДНФ перечисляет, когда формула истинна, КНФ — когда ей запрещено быть ложной. Каждый дизъюнкт — правило «хотя бы один литерал истинен».

Существование нормальных форм

Теорема 6 (Существование ДНФ и КНФ)

Каждая пропозициональная формула имеет эквивалентные ДНФ и КНФ.

Доказательство

Строим обе формы по таблице истинности.

ДНФ. Для каждой истинной строки выписываем конъюнкцию литералов: без отрицания, если переменная в строке истинна, с отрицанием — если ложна. Конъюнкции соединяем дизъюнкцией.

КНФ. Двойственно: для каждой ложной строки выписываем дизъюнкцию литералов и соединяем дизъюнкты конъюнкцией.

ДНФ истинна ровно в отмеченных строках, КНФ ложна ровно в своих — обе эквивалентны исходной формуле.

Пример: импликация по таблице

Пример (ДНФ и КНФ для $P \rightarrow Q$)

P	Q	$P \rightarrow Q$	ДНФ-терм	КНФ-терм
F	F	T	$\neg P \wedge \neg Q$	—
F	T	T	$\neg P \wedge Q$	—
T	F	F	—	$\neg P \vee Q$
T	T	T	$P \wedge Q$	—

ДНФ: $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$.

После упрощения — $\neg P \vee Q$.

КНФ: ложна формула в одной строке — дизъюнкт один, $\neg P \vee Q$.

Импликация уже была КНФ из одного дизъюнкта — таблица это показала.

Совершенная ДНФ

Определение 9 (СДНФ)

ДНФ — **совершенная** (СДНФ), если каждая конъюнкция содержит все переменные формулы — ровно по одному разу, в любом порядке.

Каждая конъюнкция СДНФ кодирует ровно одну истинную строку таблицы.

Пример

Для $P \rightarrow Q$:

$$\text{СДНФ} = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q).$$

Теорема 7 (Единственность СДНФ)

Формула, отличная от противоречия, имеет ровно одну СДНФ с точностью до порядка конъюнкций.

Совершенная КНФ

Определение 10 (СКНФ)

КНФ — **совершенная** (СКНФ), если каждый дизъюнкт содержит все переменные формулы — ровно по одному разу.

Каждый дизъюнкт СКНФ запрещает ровно одну ложную строку таблицы.

Пример

Для $P \rightarrow Q$:

$$\text{СКНФ} = \neg P \vee Q.$$

Ложная строка одна, дизъюнкт один.

У тавтологии СКНФ пуста (ложных строк нет), у противоречия пуста СДНФ.

Эквивалентность через СДНФ

Теорема 8 (Каноничность СДНФ)

Формулы α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их СДНФ совпадают с точностью до порядка конъюнкций.

Доказательство

СДНФ перечисляет истинные строки — одну конъюнкцию на строку.

Эквивалентные формулы истинны на одних и тех же строках — конъюнкции одни и те же.

Обратно: одинаковые СДНФ задают одну функцию истинности.

СДНФ — канонический портрет формулы: сравнил портреты — узнал эквивалентность без перебора формул.

Нормальные формы и выполнимость

Выполнимость читается прямо по форме:

- ДНФ выполнима, если есть конъюнкция без пары $L, \neg L$ — проверка мгновенна.
- КНФ тавтологична, если каждый дизъюнкт содержит пару $L, \neg L$.

Проверка ДНФ дёшева, но построение ДНФ по таблице стоит 2^n строк — экспонента никуда не уходит.

Умные алгоритмы (SAT-солверы) работают с КНФ и ищут выполняющий набор без полного перебора.

ДНФ и КНФ — язык, на котором о выполнимости говорят алгоритмы.

Минимизация схем сокращает ДНФ до тупиковой формы.

Лекция 9: что мы поняли?

- Таблица истинности — перебор всех 2^n интерпретаций. Класс формулы — тавтология, противоречие или выполнимая — читается по её строкам.
- Эквивалентность — одинаковые столбцы значений. Законы и принцип подстановки делают переписывание законным без перепроверки.
- Следствие $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ — отсутствие контрпримера — невыполнимость $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$.
- Семантическая теорема о дедукции сводит следствие к тавтологии импликации.
- ДНФ собирается из истинных строк, КНФ — из ложных. СДНФ и СКНФ единственны — канонические портреты формулы.
- Нормальные формы — вход для сравнения формул, SAT и схем.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько строк у таблицы формулы с семью переменными? Сколько моделей максимум у невыполнимой формулы?
2. Постройте СДНФ и СКНФ для $P \rightarrow \neg Q$.
3. Почему СДНФ единственна, а ДНФ — нет? Приведите две разные ДНФ одной формулы.
4. Докажите закон поглощения $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ таблицей.
5. Запишите отрицание «дождь или ветер» двумя способами — по де Моргану и по таблице.
6. Проверьте следствие: $P \vee Q, \neg P \models Q$. Какие строки таблицы вы проверяли?
7. Как по СДНФ двух формул узнать, эквивалентны ли они?
8. Проверьте, следует ли Q из $P \rightarrow Q$ и $\neg P$. Если нет — предъявите контрпример.

Чтение к следующей паре

- m01 — «Семантика: таблицы истинности» (тавтологии, логическое следствие), «Нормальные формы».
- Флеш-опросник — в начале лекции 10.
- Теормин 1 (множества, отношения и логика, устно) — на следующей неделе, на отдельной паре.