

10

Лекция

10–11 ноября

Натуральная дедукция

Константин Чухарев

Дискретная математика — Осень 2026



Правила вывода

Когда возникнет спор, двум философам не понадобится дискуссия: достаточно взять перья и сказать — вычислим!

— Готфрид Лейбниц

Два взгляда на выводимость

Таблицы отвечают на вопрос «истинно ли», но не показывают, *почему*.

Определение 1 (Семантическое следование)

$\Gamma \models \varphi$: на каждой интерпретации, где истинны все формулы Γ , истинна и φ .

Проверка — перебор интерпретаций.

Определение 2 (Синтаксическая выводимость)

$\Gamma \vdash \varphi$: φ выводится из Γ применением правил вывода.

Интерпретаций нет — только преобразования строк формул.

$\models$ — семантика, $\vdash$ — синтаксис.

Совпадают ли они — вопрос теорем корректности и полноты.

Система вывода

Определение 3 (Правило вывода)

Разрешённый переход от посылок заданной формы к заключению заданной формы.

Аксиома — формула, принимаемая без доказательства. **Гипотеза** — допущение внутри одного вывода.

Пример — система Гильберта: аксиомы-схемы $K : A \rightarrow (B \rightarrow A)$ и $S : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$, правило одно — modus ponens.

Вывод тривиальной $A \rightarrow A$ занимает пять строк подстановок в схемы.

Проверка шага — сверка формы, машина справляется.

Но *строить* вывод в системе Гильберта трудно: шаги не похожи на рассуждение.

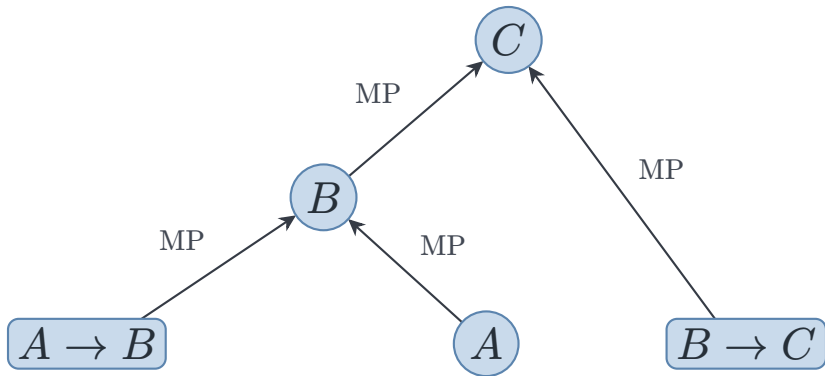
Дерево вывода

Применение правила рисуется чертой: посылки — над чертой, заключение — под ней, имя правила — справа.

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$$

Композиция применений — дерево: листья — гипотезы, корень — заключение.

Дерево вывода [2]



Две посылки $A \rightarrow B$ и A дают B , затем B и $B \rightarrow C$ дают C .

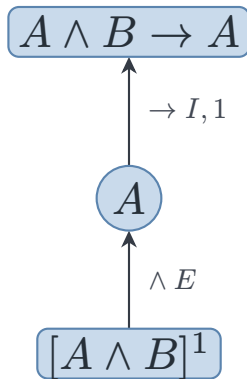
Натуральная дедукция

Гентцен и Яськовский, 1934: правила — как рассуждают математики.

- аксиом нет вовсе: вывод начинается с гипотез;
- у каждой связки пара правил: *введение* строит формулу, *устранение* разбирает;
- гипотезу можно снять: рассуждение, опиравшееся на неё, заканчивается заключением без неё.

Снятая гипотеза помечается номером: $[A]^1$, и правило ввода ссылается на этот номер.

Натуральная дедукция [2]



Из $[A \wedge B]^1$ извлекаем A , затем $\rightarrow I$ снимает гипотезу: получена $A \wedge B \rightarrow A$.

Импликация: правила

Введение	Устранение
----------	------------

$\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$
--------------------------------------	-------------------------------------

$\rightarrow I$: допустив A и выведя B , заключаем $A \rightarrow B$ — гипотеза снимается.

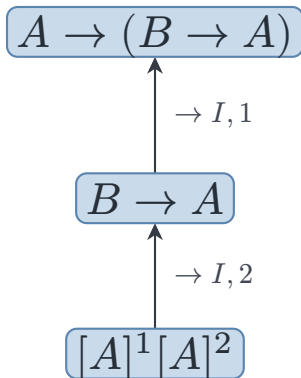
$\rightarrow E$ — modus ponens: из импликации и её антецедента — консеквент.

Пример

$P \rightarrow Q, P \vdash Q$ — одна строка по $\rightarrow E$.

Пара $\rightarrow I$ и $\rightarrow E$ — формализация «рассуждения с допущением».

Дерево: введение импликации



Внутренний шаг $\rightarrow I, 2$ снимает $[A]^2$ и даёт $B \rightarrow A$, внешний шаг $\rightarrow I, 1$ снимает $[A]^1$ и даёт $A \rightarrow (B \rightarrow A)$. Заключение не зависит ни от одной гипотезы — это теорема.

Снятие гипотезы — то, чего в системах Гильберта нет: там подстановка в схему делает ту же работу невидимо.

Конъюнкция: правила

Введение Устранение

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

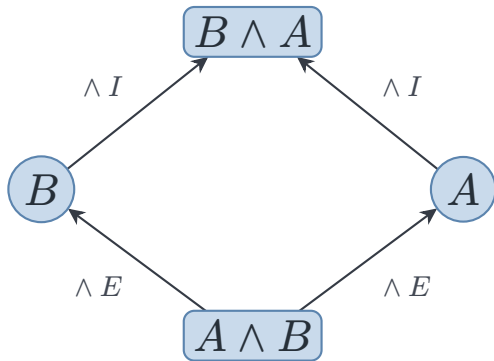
$$\frac{A \wedge B}{A}$$

$\wedge I$ собирает две формулы, $\wedge E$ извлекает любую половину.

Пример (Коммутативность)

1	$P \wedge Q$	<i>Premise</i>
2	P	$\wedge E$ 1
3	Q	$\wedge E$ 1
4	$Q \wedge P$	$\wedge I$ 3, 2

Дерево: коммутативность



Обе ветви используют одну гипотезу $A \wedge B$ — лист дерева не обязан быть единственным.

Дерево и колонка Фитча — две записи одного вывода: дерево нагляднее, колонка экономнее.

Дизъюнкция: правила

Введение	Устранение
$\frac{A}{A \vee B}$	$\frac{A \vee B \quad A \vdash C \quad B \vdash C}{C}$

$\vee I$ добавляет произвольный второй член.

$\vee E$ — разбор случаев: обе ветви обязаны привести к одному заключению.

Пример

$P \vee Q, \neg P \vdash Q$ — *дизъюнктивный силлогизм*.

В ветви P — противоречие с $\neg P$, взрыв даёт Q . В ветви Q — повторение.

Отрицание: правила

Противоречие $\perp$ — формула, ложная всегда.

Введение	Устранение
----------	------------

$$\frac{A \vdash \perp}{\neg A}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp}$$

$\neg E$: формула и её отрицание дают противоречие. $\neg I$: из вывода $\perp$ из A — принимаем $\neg A$, гипотеза снимается.

Отрицание: правила [2]

Пример

1	$A \wedge \neg A$	<i>Assumption</i>
2	A	$\wedge E\ 1$
3	$\neg A$	$\wedge E\ 1$
4	$\perp$	$\neg E\ 2, 3$
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg I\ 1-4$

Закон непротиворечия — теорема: противоречие невозможно.

Взрыв

$\frac{\perp}{A}$ X

Из противоречия следует всё — *ex falso quodlibet*.

Правило закрывает невозможные ветви рассуждения: если допущение привело к $\perp$, ветвь описывает невозможный случай, и из неё выводится нужное заключение.

Взрыв интуиционистски корректен: посылка $\perp$ никогда не истинна.

Спор о классике — не здесь, а в правиле ниже.

Косвенное доказательство

$$\frac{\neg A \vdash \perp}{A} \quad \text{IP}$$

Пример (IP: снятие двойного отрицания)

1	$\neg\neg A$	<i>Premise</i>
2	$\neg A$	<i>Assumption</i>
3	$\perp$	$\neg E$ 1, 2
4	A	<i>IP</i> 2-3

IP, двойное отрицание и исключённое третье эквивалентны по силе: без IP исключённое третье не выводимо.

Производные правила

Частые ходы оформляются как сокращения — каждое разворачивается в базовые шаги.

Правило	Схема
Modus tollens	$A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$
Дизъюнктивный силлогизм	$A \vee B, \neg A \vdash B$
Гипотетический силлогизм	$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
Контрапозиция	$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$
Де Моргана	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Производное правило — не новое допущение, а свёртка вывода.

Верификатор при желании развернёт его в базовые шаги.

Нотация Фитча

Линейная запись тех же деревьев: колонка пронумерованных строк. Временное допущение открывает поддоказательство — отступ с вертикальной чертой. Завершение поддоказательства снимает его гипотезу, правило R (реитерация) повторяет формулу извне.

Пример $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

1	A	<i>Assumption</i>
2	B	<i>Assumption</i>
3	A	$R\ 1$
4	$B \rightarrow A$	$\rightarrow I\ 2-3$
5	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\rightarrow I\ 1-4$

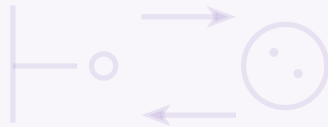
Стратегия: от цели к посылкам

Поиск вывода — работа с формой, не перебор вслепую.

1. Смотрим на главную связку *цели*: правило её введения — почти всегда следующий шаг.
Цель $A \rightarrow B$ — допускаем A и доказываем B .
2. Цель — конъюнкция — доказываем обе части по отдельности.
3. Посылки уже есть — смотрим на их главные связки и применяем *устранения*.

Введение работает на цель, устранение — на посылки.

Это два направления одного поиска.



Корректность и полнота

| *Существовать — значит быть построенным.*

— Л. Э. Я. Брауэр

Корректность

Корректность — вывод не обманывает: всё выводимое истинно. Полнота — вывод не упускает: всё истинное выводимо.

Теорема 1 (Корректность)

Если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Gamma \models \varphi$: всё выводимое — логическое следствие.

Доказательство

Индукция по дереву вывода: гипотезы следуют тривиально, а каждое правило сохраняет следование — проверяется по таблицам истинности связок.

Modus ponens: при истинных $A \rightarrow B$ и A значение B истинно по таблице импликации. Введение импликации: при истинном Γ формула $A \rightarrow B$ истинна при любом значении A .

Корректность [2]

Корректность — обязательное свойство: система, выводящая ложь из истины, бесполезна.

Полнота

Теорема 2 (Полнота (теорема Гёделя))

Если $\Gamma \models \varphi$, то $\Gamma \vdash \varphi$: всё истинное — выводимо.

Доказательство

Контрапозиция: пусть Γ не выводит φ — построим интерпретацию, где Γ истинно, а φ ложно. Расширим $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ до максимального непротиворечивого множества Δ — лемма Линденбаума.

Объявив истинными ровно атомы из Δ , индукцией проверяем: формула истинна тогда и только тогда, когда она в Δ , поэтому все Γ истинны, а φ ложна.

Доказательство неконструктивно: вывод существует, но способа его найти теорема не даёт — проверка механична, поиск труден.

Что дают теоремы вместе?

Теорема 3 (Тождество синтаксиса и семантики)

$\Gamma \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \models \varphi$.

Два независимых определения задают одно и то же отношение.

Хотим узнать

Как

Следует ли ψ из Γ искать вывод — конечный объект для проверки

Не следует ли искать контрпример-интерпретацию

Проверить вывод просто, найти — трудно.

Логика даёт гарантию: трудность в поиске, а не в правоте.

Границы полноты

Для логики высказываний и логики первого порядка полнота и корректность выполняются.

Арифметика — другое дело: теоремы Гёделя о неполноте (1931) показывают, что в достаточно богатой теории есть истинные, но невыводимые утверждения.

Полнота — свойство *исчисления*, неполнота — свойство *теории* вместе с её арифметикой.

Это различие разворачивается во втором семестре.

Лекция 10: что мы поняли?

- $\models$ проверяет истинность перебором интерпретаций, $\vdash$ — выводом по правилам из формы формул.
- У каждой связки ровно два правила: введение строит формулу, устранение использует.
- Гипотезы вводятся и снимаются: снятие — то, что превращает допущение в посылку импликации.
- Дерево вывода и нотация Фитча — две записи одной системы.
- Классика добавляет IP: косвенное доказательство, двойное отрицание и исключённое третье — одной силы.
- Корректность: всё выводимое истинно. Полнота: всё истинное выводимо — для логики высказываний и первого порядка.

Вопросы для самопроверки

1. Выведите $P \rightarrow P$ в нотации Фитча. Какие гипотезы и где снимаются?
2. Докажите $P \wedge Q \rightarrow Q$ правилами введения и устранения.
3. Выведите Q из $P \rightarrow Q$ и $\neg P$ — законно ли это? Обоснуйте.
4. Постройте вывод $\neg P$ из $P \rightarrow \perp$. Какие правила понадобились?
5. Чем косвенное доказательство отличается от введения отрицания?
6. Сформулируйте корректность и полноту. Почему нужны обе?
7. Почему проверка вывода — механическая процедура, а поиск — нет?

Чтение к следующей паре

- m02 — «Дедукция и системы вывода», «Натуральная дедукция».
- Флеш-опросник — в начале лекции 11.
- Контрольная 3 (формальная логика: правила вывода, пружфы в нотации Фитча, немного логики первого порядка) — на следующей неделе, на отдельной паре.