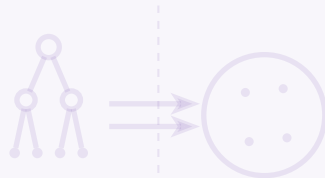


Лекция

17–18 ноября

Логика первого порядка



Синтаксис и семантика

Всякий хороший математик хотя бы наполовину философ, и всякий хороший философ хотя бы наполовину математик.

— Готлоб Фреге

Внутри атома

Логика высказываний видит «Сократ смертен» как атом P — внутреннее устройство ей недоступно.

Утверждение «каждое число либо чётно, либо нечётно» в ней не записать — только бесконечной конъюнкцией.

Нужен язык, который видит внутри утверждения:

- объекты и их свойства;
- отношения между объектами;
- слова «все» и «существует».

Это логика первого порядка — и её строгость начинается с алфавита.

Сигнатура

Определение 1 (Сигнатура)

Сигнатура — набор символов языка, каждому указана **арность**:

- константы — имена отдельных объектов, арность 0;
- функциональные символы — операции над объектами, арность $n \geq 1$;
- предикатные символы — свойства и отношения, арность $n \geq 1$.

Пример

Сигнатура арифметики: константа 0, функция $+$ арности 2, предикат $\leq$ арности 2.

Сигнатура — словарь под задачу.

Таблица базы данных «студент сдал предмет» — предикат арности 2.

Термы

Определение 2 (Терм)

Термы — имена объектов:

1. каждая переменная — терм;
2. каждая константа — терм;
3. если $t_1, \dots, t_n$ — термы и f — функция арности n , то $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Ничто другое термом не является.

Терм называет объект и ничего не утверждает — он не бывает истинным или ложным.

Пример

В сигнатуре с c, f (арность 2): $x, c, f(x, c), f(f(c, x), y)$ — термы.

Школьная запись $x + y$ — терм того же сорта.

Формулы

Определение 3 (Формула)

1. Если P — предикат арности n и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \dots, t_n)$ — **атомарная формула**.
2. Если φ, ψ — формулы, то $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi$ — формулы.
3. Если φ — формула и x — переменная, то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

Ничто другое формулой не является.

Пример

$P(x), Q(c, f(x, c)), \forall x P(f(x, x))$ — формулы.

$Q(x)$ — нет: арность Q равна двум. $P(Q(x, y))$ — нет: аргумент предиката — терм, а не формула.

Свободные и связанные переменные

Переменная под квантором — *связанная*, вне квантора — *свободная*.

Пример

В $\exists x (P(x) \wedge Q(y))$ переменная x связана, y свободна.

Значение x зафиксировал квантор, значение y — не зафиксировано никем.

Определение 4 (Замкнутая формула)

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

Спрашивать «истинна ли формула» имеет смысл только о замкнутой.

Формула со свободной y — шаблон, ждущий значения.

Подстановка

Запись $\varphi\left[\frac{t}{x}\right]$ означает результат замены свободных вхождений x в φ термом t .

Подстановка обязана быть *свободной* — без захвата: если t содержит x , а в φ есть $\forall x$, подстановка исказит смысл.

Пример

Для $\varphi = \forall x (x < y)$ замена $y := x$ даёт $\forall x (x < x)$ — бессмыслица.

Свободная подстановка требует переименовать связанную переменную: $\forall z (z < x)$.

Кванторные правила вывода (из натуральной дедукции) работают только при свободной подстановке.

Интерпретация

Определение 5 (Интерпретация)

Интерпретация I назначает значения символам сигнатуры:

- непустое множество D — **носитель**;
- каждой константе c — элемент $c^I \in D$;
- каждой функции f арности n — функция $f^I : D^n \rightarrow D$;
- каждому предикату P арности n — отношение $P^I \subseteq D^n$.

Сигнатура — знаки, интерпретация — смысл.

Модель формулы — интерпретация вместе с носителем, на которой формула истинна.

Истинность в интерпретации

Истинность замкнутой формулы определяется индукцией по построению.

- Атом $P(t_1, \dots, t_n)$ истинен, если кортеж значений термов принадлежит P^I .
- Связки — как в логике высказываний.
- $\forall x \varphi$ истинна, если φ истинна для *каждого* элемента носителя.
- $\exists x \varphi$ истинна, если φ истинна *хотя бы для одного*.

Значение целого вычисляется из значений частей — композициональность переносится с таблиц на модели.

Конечный текст правил покрывает бесконечное множество формул.

Одна формула, две модели

Пример (Школьная математика)

Сигнатура: константа 0, функция $+$, предикат $\leq$.

Модель 1. Носитель $\mathbb{Z}$: $0^I = 0$, $+^I$ — сложение, $\leq$ — обычный порядок.

Модель 2. Носитель $\mathbb{N}$ — те же назначения.

Формула	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
$\exists x \forall y \ x \leq y$	ложна	истинна
$\forall x \exists y \ x \leq y$	истинна	истинна

На целых нет наименьшего, на натуральных есть 0.

Истинность — свойство пары «формула и интерпретация», а не формулы самой по себе.

Выполнимость и общезначимость

Определение 6 (Выполнимость)

Формула **выполнима**, если существует интерпретация, в которой она истинна.

Определение 7 (Общезначимость)

Формула **общезначима**, обозначается $\models A$, если истинна в каждой интерпретации.

Пример

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ — общезначима: носитель непуст.
- $\forall x P(x)$ — выполнима, но не общезначима.
- $\forall x (P(x) \wedge \neg P(x))$ — невыполнима.

Двойственность знакома по логике высказываний: A общезначима тогда и только тогда, когда $\neg A$ невыполнима.

Связь с тавтологиями

Без кванторов общезначимость — знакомая тавтология: интерпретаций атомов ровно 2^n , проверка — таблица.

Запись $\Gamma \models \varphi$ переносится дословно: в каждой интерпретации, где истинны все формулы Γ , истинна и φ .

С кванторами таблица не работает — носитель бывает бесконечным.

Проверка общезначимости формул первого порядка — неразрешимая задача: алгоритма, отвечающего на все входы, не существует.

Кванторные правила вывода — рабочий инструмент там, где перебор бессилён.

Та же архитектура, новый масштаб: от строк таблицы — к бесконечным носителям.

Отрицание и порядок кванторов

Отрицание проносится сквозь квантор, меняя его тип:

Теорема 1 (Отрицание кванторов)

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.

Пример («Не все» и «все не»)

$\neg \forall x$ сдал (x) — сдал не каждый: хотя бы один провалился.

$\forall x \neg$ сдал (x) — не сдал никто.

Порядок тоже меняет смысл: $\forall x \exists y L(x, y)$ — у каждого свой y , $\exists y \forall x L(x, y)$ — один y на всех.

Силлогизмы Аристотеля



Логика до сих пор не могла сделать ни шага вперёд и, судя по всему, кажется наукой вполне законченной и завершённой.

— Иммануил Кант

Первая система рассуждений

Аристотель, «Органон», IV век до н.э. — первая формальная теория вывода.

Силлогизм — вывод из двух суждений о трёх терминах: субъект S , предикат P и средний термин M , связывающий посылки.

Пример (Классика жанра)

Все люди смертны. Сократ — человек. Значит, Сократ смертен.

Этой системе пользовались две тысячи лет — Фреге заменил её логикой предикатов в 1879 году.

Четыре типа суждений

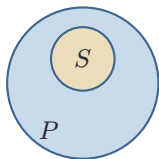
Тип	Форма	Имя	Современная запись
<i>A</i>	Все <i>S</i> суть <i>P</i>	общеутвердительное	$\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$
<i>E</i>	Ни одно <i>S</i> не есть <i>P</i>	общеотрицательное	$\forall x (S(x) \rightarrow \neg P(x))$
<i>I</i>	Некоторые <i>S</i> суть <i>P</i>	частноутвердительное	$\exists x (S(x) \wedge P(x))$
<i>O</i>	Некоторые <i>S</i> не суть <i>P</i>	частноотрицательное	$\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$

Буквы *A*, *E*, *I*, *O* — из средневековой латинской мнемоники, в ходу до сих пор.

A и *E* — *общие* суждения: обо всех. *I* и *O* — *частные*: о существовании хотя бы одного.

Круги Эйлера

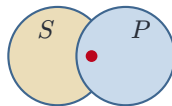
Тип суждения — картинка из двух кругов: точки отмечают «некоторые».



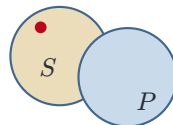
A



E



I

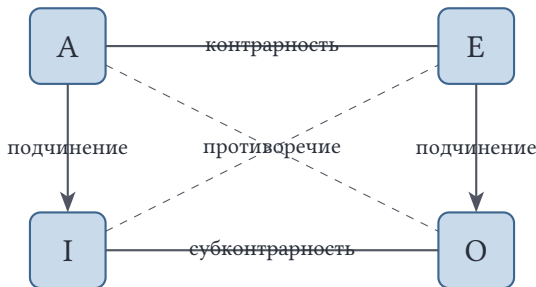


O

A : S целиком внутри P . E : круги не пересекаются. I и O : пересечение с точкой в нужной области.

Логический квадрат

Отношения между суждениями об одних S и P — квадрат оппозиций.



- **Противоречие** ($A-O$, $E-I$): ровно одно истинно.
- **Противоположность** ($A-E$): оба истинными быть не могут, оба ложными — могут.
- **Частичная совместимость** ($I-O$): оба ложными быть не могут.
- **Подчинение** (A к I , E к O): из общего следует частное.

Фигуры силлогизма

Фигура — положение среднего термина M в посылках.

Фигура	Большая посылка	Меньшая посылка
I	$M-P$	$S-M$
II	$P-M$	$S-M$
III	$M-P$	$M-S$
IV	$P-M$	$M-S$

Комбинация фигуры и типов суждений — *модус*: правильных модусов из 256 возможных — 24.

Средние века запоминали их именами: *Barbara*, *Celarent*, *Darii* — по гласным буквам типов.

Barbara

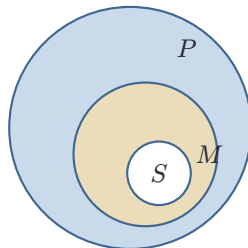
Первая фигура, все суждения типа A .

Вывод

Все M суть P . Все S суть M . Значит, все S суть P .

M внутри P , S внутри M — значит, S внутри P .

Круги



В современной записи: $\forall x (M \rightarrow P)$, $\forall x (S \rightarrow M)$, значит $\forall x (S \rightarrow P)$ — транзитивность включения.

Celarent

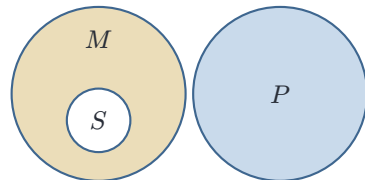
Первая фигура, суждения E и A .

Вывод

Ни одно M не есть P . Все S суть M . Значит, ни одно S не есть P .

M от P отделено, S внутри M — значит, S от P отделено.

Круги



Проверка кругами — та же семантика, что и таблица истинности: модель видна глазами.

Darii

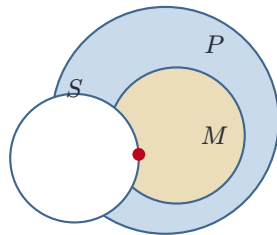
Первая фигура, суждения A и I : частный вывод из общего.

Вывод

Все M суть P . Некоторые S суть M . Значит, некоторые S суть P .

Точка в $S \cap M$, а M внутри P — точка попадает в $S \cap P$.

Круги



Кванторы здесь работают в полную силу: $\exists x (S(x) \wedge M(x))$ даёт свидетеля, которого нельзя терять.

Экзистенциальное допущение

В традиционной логике общее суждение предполагает непустоту субъекта: из A следует I .

В современной записи из $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$ *не следует* $\exists x (S(x) \wedge P(x))$ — при пустом S первая формула истинна *вакуумно*, вторая ложна.

Пример (Единороги)

«Все единороги магические» — в современной логике истинно: контрпримеров нет.

«Некоторые единороги магические» — ложно. Аристотелевский ход A к I дал бы противоречие.

Отказ от экзистенциального допущения отделил форму утверждения от вопроса о существовании. Силлогистика сохранилась — как частный случай современной логики.

Лекция 11: что мы поняли?

- Логика первого порядка заглядывает внутрь атома: сигнатура задаёт словарь, термы называют объекты, формулы утверждают.
- Переменные бывают свободными и связанными. Истинность имеет смысл для замкнутых формул.
- Интерпретация — носитель и назначения символам. Одна формула в разных моделях получает разные значения.
- Общезначимость — истина во всех моделях. Для формул без кванторов это знакомая тавтология.
- Силлогистика Аристотеля — первая система вывода: суждения A , E , I , O , фигуры, круги Эйлера.
- Современная логика включила силлогизмы как частный случай — ценой отказа от экзистенциального допущения.

Вопросы для самопроверки

1. Выпишите сигнатуру языка для утверждения «каждый студент знает хотя бы один язык программирования» и запишите формулу.
2. Какие из выражений — термы, а какие — формулы: $f(c)$, $P(x, y)$, $P(f(x))$, $f(P(x))$?
3. Почему в $\exists x (S(x) \wedge P(x))$ стоит конъюнкция, а в $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$ — импликация?
4. Запишите формулу «у каждого студента есть научный руководитель» двумя способами — с разными порядками кванторов. Есть ли разница в смысле?
5. Что назначает интерпретация символам сигнатуры? Что такое носитель?
6. Изобразите кругами Эйлера суждения E и O . В чём разница с I ?
7. Почему из «все единороги магические» не следует «некоторые единороги магические»?

Чтение к следующей паре

- m03 — «Предикаты», «Несколько кванторов», «Семантика: модели и истинность», «Силлогистика Аристотеля».
- Флеш-опросник — в начале лекции 12.