

1

Лекция

9–10 февраля

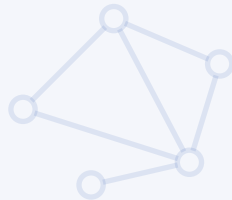
Графы

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027

Язык графов

Карта не есть территория.



— Альфред Коржибски

Всё связано

Схема метро не похожа на географическую карту.

Станции сдвинуты, линии выпрямлены, расстояния искажены.

Но пассажир находит путь без труда.

- Социальная сеть: кто с кем дружит.
- Карта дорог: какие города соединены.
- Зависимости программ: что от чего собирается.
- Электрическая цепь: что с чем соединено.

Связность, а не геометрия, — суть графа.

Семестр 2 начинается с графов — языка связей.

План модуля: обходы и деревья, циклы Эйлера и Гамильтона, паросочетания, кратчайшие пути, планарность, раскраска, потоки.

Графы были рядом

Весь семестр 1 графы работали за кулисами.

- Отношение — орграф: вершины-элементы, стрелки-пары.
- Порядок — диаграмма Хассе: рёбра только к покрывающим.
- Логика высказываний — граф импликаций: вершины-литералы, стрелки-импликации.
- Отношение в памяти — матрица смежности: единицы на парах.

Теперь графы выходят на сцену сами.

Связь перестаёт быть свойством чего-то другого и становится главным объектом.

Граф

Определение 1 (Граф)

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V — множество вершин, а E — множество рёбер.

Рёбра неориентированного графа — неупорядоченные пары $\{u, v\}$.

Пример

Треугольник: $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$.

Полный граф K_n содержит все $n \frac{n-1}{2}$ возможных рёбер.

Определение ничего не говорит о рисунке.

Граф — это множества, а не линии на бумаге.

Ориентированные графы

Определение 2 (Оргграф)

Граф называется **ориентированным** (оргграфом), если рёбра (дуги) — упорядоченные пары (u, v) .

Дуга из u в v не обязана возвращаться.

Пример

Цитирования: статья $\rightarrow$ статья, которую она цитирует.

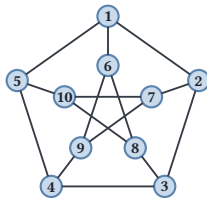
Стрелка «переползла из отношения»: оргграф отношения из семестра 1 — обычный оргграф.

Ориентированный граф — это бинарное отношение, увиденное как единый объект.

Разновидности

Определение 3

- **Простой граф** — без петель и кратных рёбер.
- **Мультиграф** — петли и кратные рёбра разрешены.
- **k -регулярный граф** — степень каждой вершины равна k .



Граф Петерсена прост и 3-регулярен: у каждой вершины ровно три соседа.

Мультиграф понадобится уже на этой неделе — в задаче о кёнигсбергских мостах.

Взвешенные графы

Дорогам приписано время проезда, связям — прочность, рёбрам сети — пропускная способность.

Определение 4 (Взвешенный граф)

Пара (G, w) , где $G = (V, E)$ — граф, а $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ — весовая функция.

Вес ребра обозначается $w(u, v)$.

Смысл веса задаёт задача, а не граф: время, длина, стоимость.

Весы появятся в лекции о кратчайших путях и в лекции о потоках.

Степень вершины

Определение 5 (Степень)

Степень вершины v — число инцидентных ей рёбер: $\deg(v)$.

В орграфе различают полустепень исхода $\deg^+(v)$ и полустепень захода $\deg^-(v)$.

Пример

В звезде из пяти вершин центр имеет степень 4, каждый лист — степень 1.

В графе цитирований $\deg^-(v)$ — число ссылок на статью.

Степень — локальная мера: она видит только соседей вершины.

Лемма о рукопожатиях

Теорема 1 (Лемма о рукопожатиях)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Число вершин нечётной степени всегда чётно.

Доказательство

Докажем двойным счётом: каждое ребро имеет два конца и в сумме степеней учитывается дважды — итого $2|E|$.

Следствие: сумма чётна, вклад чётных степеней чётен, значит нечётных слагаемых чётное число.

Двойной счёт

Метод двойного счёта — рабочий инструмент всей теории графов.

Многие тождества доказываются одной фразой: посчитаем рёбра двумя способами.

Пример

Вечеринка: люди — вершины, рукопожатия — рёбра.

Сумма «рукопожатий в каждой руке» равна удвоенному числу рукопожатий.

Людей с нечётным числом рукопожатий на любой вечеринке — чётное число.

Локальное (степени) связано с глобальным (число рёбер) одним равенством.

Последовательность степеней

Последовательность степеней — грубый портрет графа.

Какие последовательности вообще реализуемы?

Пример

Последовательность $(3, 3, 3, 1)$: сумма 10 чётна, но графа с такими степенями не существует.

Вершина степени 1 соединена ровно с одной вершиной, а каждая из трёх остальных обязана быть смежной со всеми — включая её.

Чётность суммы — необходимое условие, но не критерий: полный критерий даёт теорема Эрдёша–Галлаи, а жадный алгоритм Хавела–Хакими ещё и строит граф.

И даже реализуемая последовательность степеней не определяет граф однозначно.

Представления графа

Граф хранится в памяти тремя способами.

Способ	Память	Проверка смежности
Список рёбер	$O(E)$	$O(E)$
Матрица смежности	$O(n^2)$	$O(1)$
Список смежности	$O(n + E)$	$O(\deg(v))$

Для разреженных графов, где $|E| \ll n^2$, стандартный выбор — список смежности.

Один граф — три представления

Пример

Квадрат с диагональю: $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}\}$.

- Список рёбер — пять пар.
- Матрица смежности — 4×4 нулей и единиц.
- Списки смежности: $1 : [2, 3, 4]$, $2 : [1, 3]$, $3 : [1, 2, 4]$, $4 : [1, 3]$.

Все три представления несут одну и ту же информацию.

Выбор диктуется операциями, которые нужны алгоритму.

Матрица смежности

Матрица A с $A_{ij} = 1$ для смежных вершин — старая знакомая: отношение из семестра 1 хранилось точно так же.

Теорема 2 (Маршруты через степени матрицы)

Элемент $(A^k)_{ij}$ равен числу маршрутов длины k из вершины i в вершину j .

Доказательство

Докажем индукцией по k : база $k = 1$ — определение смежности.

Шаг: маршрут длины $k + 1$ распадается на маршрут длины k до вершины w и последнее ребро, что даёт $\sum_w (A^k)_{iw} A_{wj}$.

Проверить, есть ли маршрут длины k , можно возведением матрицы в степень — без всякого обхода.

Изоморфизм

Когда два графа — «один и тот же» граф?

Определение 6 (Изоморфизм)

Графы G и H **изоморфны**, если существует биекция вершин, сохраняющая рёбра: $\{u, v\} \in E$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in F$.

Класс изоморфизма — непомеченный граф: одна структура, любые имена вершин.

Пример

Цепочка и звезда: по 4 вершины и 3 ребра, но степени $(2, 2, 1, 1)$ против $(3, 1, 1, 1)$ — изоморфизма нет.

Совпадение инвариантов изоморфизм не доказывает: кандидатов-биекций $n!$, и перебор непосилен.

Графы и код

- Списки смежности — стандарт графовых библиотек: NetworkX в Python, petgraph в Rust.
- Сборка проекта — обход графа зависимостей.
- Маршрутизатор держит карту сети и пересчитывает кратчайшие пути.
- Поиск компонент в соцсети — обход, о нём следующая лекция.

Матрица смежности живёт в коде там, где нужна быстрая проверка смежности: плотные графы, алгебра над матрицами.



Пути и связность

Человек не остров, сам по себе существующий.

— Джон Донн

Маршруты, пути, циклы

Определение 7

Маршрут — последовательность вершин $v_0, v_1, \dots, v_k$, где соседние соединены ребром.

Путь — маршрут без повторяющихся вершин.

Цикл — замкнутый маршрут, в котором повторяются только первая и последняя вершины.

Пример

В треугольнике $1, 2, 3, 1$ — цикл длины 3.

$1, 2, 3, 2, 1$ — замкнутый маршрут, но не цикл: вершина 2 повторяется в середине.

Разница — в дисциплине: маршрут разрешает повторы, путь запрещает.

Связность

Определение 8

Граф **связен**, если между любой парой вершин есть путь.

Компонента связности — максимальный связный подграф.

Пример

Граф с рёбрами $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ распадается на две компоненты: $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5\}$.

Компоненты — это «куски» графа.

Связность отвечает на вопрос «можно ли добраться».

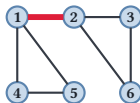
Донновское «никто не остров» превращается в точное утверждение: граф, у которого одна компонента.

Мосты и точки сочленения

Определение 9

Ребро — **мост**, если его удаление увеличивает число компонент.

Вершина — **точка сочленения**, если её удаление вместе с рёбрами увеличивает число компонент.



Ребро $\{1, 2\}$ — мост: за ним начинается второй мир.

Уязвимость сети — это её мосты и точки сочленения.

Расстояние и диаметр

Определение 10

Расстояние $d(u, v)$ — длина кратчайшего пути между u и v .

Диаметр графа — наибольшее расстояние между вершинами.

Пример

В цепочке $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ диаметр равен 4: крайние вершины дальше всех.

В звезде диаметр равен 2: любые два листа соединены через центр.

Расстояние в невзвешенном графе — число рёбер, и находить его умеет обход в ширину.

Как именно — тема следующей лекции.

Лекция 1: что мы поняли?

- Граф — пара (V, E) : язык связей, который весь семестр 1 работал за кулисами у отношений, порядков и импликаций.
- Лемма о рукопожатиях: $\sum \deg(v) = 2|E|$, а вершин нечётной степени всегда чётное число.
- Маршрут, путь, цикл различаются дисциплиной повторов, компоненты — «куски» графа.
- Три представления — список рёбер, матрица, списки смежности.
- Степень матрицы смежности считает маршруты.

Вопросы для самопроверки

1. Докажите лемму о рукопожатиях. Почему вершин нечётной степени всегда чётное число?
2. Существует ли граф со степенями $(3, 3, 3, 1)$? А со степенями $(2, 2, 2)$?
3. Что равно $(A^k)_{ij}$ и почему?
4. В графе-звезде с центром и 4 листьями найдите диаметр и все точки сочленения.
5. Почему оргграф отношения из семестра 1 — это в точности ориентированный граф?

Чтение к следующей паре

- m09 — «Основные определения», «Пути, циклы, связность».
- Флеш-опросник — в начале лекции 2.