

Лекция

23–24 февраля

Циклы и паросочетания



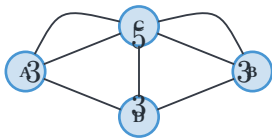
Эйлеровы графы

Я не удовлетворён алгеброй: она не даёт ни кратчайших путей, ни красивейших построений геометрии.

— Готфрид Лейбниц

Кёнигсбергские мосты

Можно ли за одну прогулку пройти каждый из семи мостов Кёнигсберга ровно один раз?



Жители спорили — маршрут никто не находил.

В 1736 году Эйлер превратил прогулку в математику.

От прогулки к графу

Сведение Эйлера:

- участки суши — вершины;
- мосты — рёбра;
- маршрут по мостам — маршрут по рёбрам.

Каждый вход и выход с участка тратит два моста, поэтому участок с нечётным числом мостов — только начало или конец прогулки.

В Кёнигсберге таких участков четыре, а допустимо не более двух — прогулка невозможна.

Граф здесь мультиграф: между двумя участками несколько мостов.

Задача из «геометрии положения» — старой мечты Лейбница о науке связей.

Эйлеров цикл

Определение 1

Эйлеров цикл — замкнутый маршрут, проходящий каждое ребро графа ровно один раз.

Граф **эйлеров**, если содержит эйлеров цикл.

Эйлерова цепь проходит каждое ребро ровно один раз, но начало и конец различны.

Пример

K_5 эйлеров: все степени равны 4.

K_4 не эйлеров и без цепи: все степени равны 3, а нечётных вершин больше двух.

Критерий Эйлера

Теорема 1 (Критерий Эйлера)

Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда все степени чётны.

Эйлерава цепь существует тогда и только тогда, когда ровно две вершины имеют нечётную степень.

Доказательство

Необходимость: каждый проход через вершину тратит два ребра — вход и выход, поэтому степень чётна.

Достаточность: идём по непосещённым рёбрам, пока не вернёмся в старт, а оставшиеся рёбра распадаются на циклы и вклеиваются в первый.

Для цепи: соединим две нечётные вершины фиктивным ребром и удалим его из готового цикла.

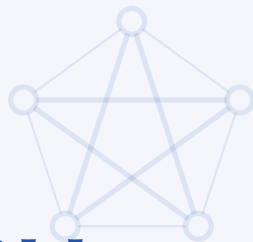
Мосты и чётность

Критерий превращает прогулку по городу в проверку чётности.

- Все степени чётны — эйлеров цикл есть.
- Ровно две нечётные вершины — есть цепь, начинать в одной из них.
- Иначе — маршрута нет.

Нужна и связность: два отдельных эйлеровых цикла в разных компонентах единого обхода не дают.

В 1944 году два моста Кёнигсберга разрушили, нечётных вершин стало ровно две — прогулка стала возможной.



Гамильтоновы графы

Задачи, достойные атаки, доказывают свою ценность тем, что дают сдачу.

— Пит Хайн

Гамильтонов цикл

Определение 2

Гамильтонов цикл проходит каждую вершину графа ровно один раз и возвращается в начало.

Граф **гамильтонов**, если содержит такой цикл.

Пример

K_n гамильтонов при $n \geq 3$.

Звезда не гамильтонова: центр пришлось бы посетить несколько раз.

Граф Петерсена гамильтонова цикла не имеет.

Гамильтон продавал «Икосианскую игру» — обход додекаэдра по вершинам: игра провалилась, имя осталось.

Рёбра против вершин

Слово «ребро» заменено на «вершину» — и сложность меняется скачком.

Вопрос	Условие	Проверка
Эйлеров цикл?	степени чётны, связность	$O(V + E)$
Гамильтонов цикл?	простого критерия нет	перебор

Проверить данный цикл легко, найти его трудно: гамильтоновость — NP-полная задача, как SAT из булевой алгебры семестра 1.

Чётность степени — локальное свойство, а принадлежность вершины циклу связывает весь граф сразу.

Теорема Дирака

Теорема 2 (Дирак, 1952)

Если в графе с $n \geq 3$ вершинами $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ для каждой вершины, то граф гамильтонов.

Условие достаточное, но не необходимое: цикл C_5 гамильтонов, хотя все его степени равны 2.

Оре ослабил условие: достаточно $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ для каждой пары несмежных вершин.

Дирак — частный случай Оре.

Почему Дирак работает?

Доказательство (набросок)

Рассмотрим максимальный простой путь $P = v_1, \dots, v_k$.

По максимальной все соседи v_1 и v_k лежат на P .

Соседи v_1 — это вершины v_{i+1} , соседи v_k — вершины v_i , и тех и других не меньше $\frac{n}{2}$, поэтому среди позиций $1, \dots, k-1$ есть общая: множества размером $\frac{n}{2}$ не помещаются в $k-1 < n$ позиций без пересечения.

По общей позиции i путь замыкается в цикл длины k : рёбра пути плюс $v_i v_k$ и $v_1 v_{i+1}$.

Если бы цикл пропускал вершину, условие Дирака позволило бы вставить её в цикл и удлинить путь — противоречие с максимальнойностью.

Идея «максимальный путь + пересечение множеств соседей» — образец того, как локальные степени выпрямляются в глобальную структуру.

Двудольность и паросочетания



Каждый из нас — половинка человека, и каждый вечно ищет половину, соответствующую ему.

— Платон

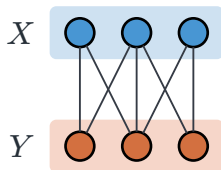
Двудольные графы

Определение 3 (Двудольный граф)

Граф **двудольен**, если вершины разбиваются на доли X и Y так, что каждое ребро соединяет вершины из разных долей.

Пример

- Работы и исполнители, студенты и курсы: ребро — умение или запись.
- C_4 двудольен: доли $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$, а треугольнику C_3 двух долей не хватает.



Критерий двудольности

Теорема 3 (Критерий двудольности)

Граф двудолен тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

Доказательство

В двудольном графе вершины цикла чередуются между долями, и возврат в исходную долю требует чётного числа шагов.

Обратно: запустим BFS из любой вершины и покрасим чётные слои в один цвет, нечётные — в другой.

Ребро внутри одного цвета вместе с путями к старту дало бы нечётный цикл, поэтому таких рёбер нет.

Деревья двудольны автоматически — циклов нет, а проверка и разбиение выполняются одним обходом за $O(V + E)$.

Двудольность как раскраска в два цвета

Разбиение на доли — правильная раскраска в два цвета.

Двудольность графа с рёбрами и хроматическое число $\chi(G) = 2$ — одно и то же.

Пример

Расписание экзаменов: вершины — экзамены, ребро — общие студенты.

Два слота достаточны тогда и только тогда, когда граф двудольен.

Треугольник из трёх экзаменов с общими студентами требует третий слот.

Для k цветов при $k \geq 3$ простого критерия, аналогичного нечётным циклам, нет — раскраска станет главной героиней следующей лекции.

Паросочетания

Определение 4

Паросочетание — множество рёбер без общих вершин.

Паросочетание **совершенное**, если покрывает все вершины.

Пример

$K_{3,3}$ имеет совершенное паросочетание из трёх рёбер.

В $K_{3,2}$ максимум — два ребра, совершенного нет: вершин нечётное число.

Каждый берёт не больше одного ребра — как на танцах, где у каждого партнёра ровно одна пара.

Жадный подход и его предел

1. Берём любое свободное ребро, вычёркиваем его концы, повторяем.

Пример

Пути $a - x$, $a - y$, $b - y$: жадный выбор $a - x$ оставляет b без пары.

Выбор $a - y$, $b - x$ покрывает всех.

Жадное паросочетание может не быть максимальным: неудачный ранний выбор запирает вершину.

Нужно уметь передумывать.

Увеличивающий путь

Определение 5 (Увеличивающий путь)

Чередующийся путь — путь, рёбра которого попеременно вне паросочетания и в нём.

Увеличивающий путь — чередующийся путь с обоими концами непокрытыми.

Инверсия рёбер вдоль пути (непаросочетанные входят, паросочетанные выходят) растит паросочетание на одно ребро.

Теорема 4 (Берге)

Паросочетание максимально тогда и только тогда, когда в графе нет увеличивающих путей.

Та же идея «передумать по пути» вернётся в потоках.

Теорема Холла

Когда паросочетание покрывает целую долю?

Теорема 5 (Холл, 1935)

В двудольном графе с долями X и Y паросочетание, покрывающее X , существует тогда и только тогда, когда

$$\forall S \subseteq X : |N(S)| \geq |S|,$$

где $N(S)$ — соседи множества S в Y .

Условие называют «свадебной теоремой»: каждая группа студентов должна знать не меньше курсов, чем в ней самой.

Доказательство идёт через увеличивающие пути: у нарушающего множества покрытия нет.



Кратчайшие пути

Путь в тысячу ли начинается с одного шага.

— Лао-цзы

Веса и расстояния

Во взвешенном графе расстояние — сумма весов, а не число рёбер.

Пример

Рёбра $A - B$, $B - C$, $C - D$ по 2 и прямое ребро $A - D$ весом 10.

По числу рёбер короче напрямую, по весу путь через B и C стоит 6.

BFS минимизирует число рёбер и на весах врёт.

Нужен алгоритм, который живёт в порядке «дешевизны», а не слоёв.

Алгоритм Дейкстры

1. $\text{dist}(s) = 0$, остальные расстояния равны ∞ .
2. Пока есть необработанные вершины:
 - берём вершину u с минимальным dist ;
 - для каждого соседа v пробуем улучшение: если $\text{dist}(u) + w(u, v) < \text{dist}(v)$, обновляем $\text{dist}(v)$ и запоминаем u как предыдущего.

Минимум из очереди берёт очередь с приоритетом — min-heap.

Сложность — $O((V + E) \log V)$.

Почему Дейкстра корректен?

Когда вершина u извлекается, её расстояние уже окончательное.

Доказательство

Докажем индукцией по порядку извлечения.

Любой другой путь до u обязан выходить из уже обработанной части через вершину w , ещё лежащую в куче, с $\text{dist}(w) \geq \text{dist}(u)$.

Весы неотрицательны, поэтому продолжение от w не может стать короче, чем $\text{dist}(u)$, — короче извлечённого расстояния пути нет.

Неотрицательность весов — не техническая мелочь, а несущая балка доказательства.

С отрицательными рёбрами раннее решение запирается, а дешёвый обходной путь приходит позже: тогда работает Беллман–Форд.

Дейкстра и код

- В GPS-навигаторе и маршрутизаторе — варианты Дейкстры на графе дорог и сети.
- Приоритетная очередь — `heapq` в Python, `BinaryHeap` в Rust.
- Карты сервисов перевозок пересчитывают кратчайшие пути каждую минуту.

Реальные дороги дают неотрицательные веса — именно тот случай, где Дейкстра гарантированно права.

Лекция 3: что мы поняли?

- Эйлеров цикл — по рёбрам, критерий локален: степени чётны плюс связность.
- Гамильтонов цикл — по вершинам: критерия нет, задача NP-полна, а Дирак даёт достаточное условие.
- Двудольность — отсутствие нечётных циклов, проверяется раскраской BFS в два цвета.
- Паросочетание растёт инверсией увеличивающего пути, Холл даёт условие покрытия доли.

Вопросы для самопроверки

1. Почему в Кёнигсберге прогулка была невозможна, а после разрушения двух мостов — возможна?
2. Докажите: граф с вершиной степени $n - 1$ и остальными степени 1 не гамильтонов при $n \geq 4$.
3. Почему дерево всегда двудольно?
4. Постройте пример, где жадное паросочетание не максимально, и увеличивающий путь для него.
5. Почему Дейкстра не работает с отрицательными весами? Какое условие доказательства ломается?

Чтение к следующей паре

- m09 — «Эйлеровы графы», «Гамильтоновы графы», «Двудольные графы», «Кратчайшие пути».
- Флеш-опросник — в начале лекции 4.
- Контрольная 1 (графы) — на следующей неделе, на отдельной паре.