

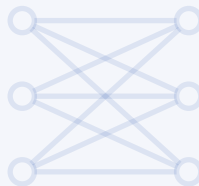
Лекция

2–3 марта

Планарность, раскраска, ПОТОКИ

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027



Планарность

Хорошие заборы делают хороших соседей.

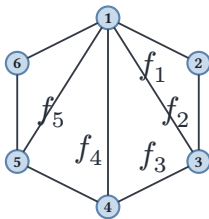
— Роберт Фрост

Планарные графы

Определение 1

Граф **планарен**, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер.

- Печатная плата: проводники не могут пересекаться — короткое замыкание.
- Микросхема: пересечение проводов на слое физически невозможно.



Планарность — свойство структуры: вопрос в том, существует ли хоть одна укладка.

Грани

Определение 2

Грани планарной укладки — области, на которые рёбра делят плоскость.

Внешняя грань — область снаружи.

Укладка на рисунке имеет 5 внутренних граней и одну внешнюю.

Слово «укладка» не зря повторяется: грани зависят от рисунка.

Сейчас увидим, что их число — нет.

Формула Эйлера

Теорема 1 (Формула Эйлера)

Для связного планарного графа:

$$V - E + F = 2,$$

где F — число граней, включая внешнюю.

Доказательство (набросок)

Строим граф, добавляя рёбра: ребро в новую вершину не меняет число граней, ребро внутри грани делит её надвое.

В обоих случаях $V - E + F$ сохраняется, а для одной вершины $1 - 0 + 1 = 2$.

Куб: $8 - 12 + 6 = 2$, тетраэдр: $4 - 6 + 4 = 2$ — многогранники считают та же формула.

Сколько рёбер у планарного графа?

Формула Эйлера превращает рисунок в неравенства.

Следствие 1 (Оценка на число рёбер)

Для простого планарного графа с $V \geq 3$:

$$E \leq 3V - 6.$$

В любом таком графе есть вершина степени ≤ 5 .

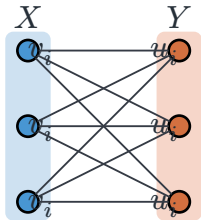
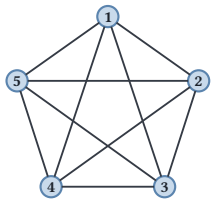
Доказательство

Каждая грань ограничена не менее чем тремя рёбрами, и каждое ребро служит границей не более чем двум граням: $3F \leq 2E$.

Подстановка $F \leq 2\frac{E}{3}$ в формулу Эйлера даёт $V - \frac{E}{3} \geq 2$, то есть $E \leq 3V - 6$.

Для следствия: $2E = \sum \deg(v) \leq 6V - 12$, значит, все степени ≥ 6 невозможны.

K5 и K3,3



K_5 нарушает оценку: 10 рёбер против разрешённых $3 \cdot 5 - 6 = 9$ — он не планарен.

$K_{3,3}$ оценку выполняет, но он двудолен, и у графов без треугольников оценка сильнее: $E \leq 2V - 4$.

У $K_{3,3}$ девять рёбер против восьми — тоже не планарен.

Неравенства — необходимые условия, а не критерий: $K_{3,3}$ проходит $3V - 6$, но планарности нет.

Теорема Куратовского

Определение 3

Подразбиение графа получается заменой рёбер на пути через новые вершины степени 2.

Теорема 2 (Куратовский, 1930)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, являющегося подразбиением K_5 или $K_{3,3}$.

Доказательство технически тяжёлое и здесь не приводится — формулировка честная: два запрещённых каркаса видят всю непланарность.

Логика знакома по критериям Эйлера и двудольности: запрет маленьких конфигураций ловит глобальное свойство.



Раскраска

Цвет — сила, которая непосредственно влияет на душу.

— Василий Кандинский

Вершинная раскраска

Определение 4

Правильная k -раскраска — раскраска вершин в k цветов, при которой смежные вершины различны.

Хроматическое число $\chi(G)$ — минимальное число цветов.

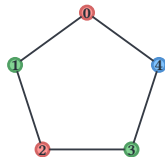
Пример

$\chi(C_4) = 2$: чётный цикл двудолен.

$\chi(C_5) = 3$: нечётный цикл в два цвета не ложится.

$\chi(K_n) = n$: каждому нужна своя краска.

Вершинная раскраска [2]



$$\chi = 3$$

Раскраска — обобщение двудольности: доли — это цвета.

Двудольные графы и только они имеют $\chi \leq 2$.

Жадная раскраска

1. Зафиксировать порядок вершин.
2. Красить каждую в наименьший цвет, свободный у её уже раскрашенных соседей.

Теорема 3 (Жадная оценка)

Жадная раскраска использует не более $\Delta(G) + 1$ цветов, где $\Delta(G)$ — максимальная степень.

Доказательство

Когда очередь доходит до вершины, её раскрашенные соседи заняли не более $\deg(v) \leq \Delta(G)$ цветов, и из палитры в $\Delta(G) + 1$ цветов свободен хотя бы один.

Оценка точна на K_n и нечётных циклах, а результат зависит от порядка вершин.

Шесть цветов — в несколько строк

Теорема 4 (Шесть красок)

Любой планарный граф 6-раскрашиваем.

Доказательство (набросок)

Индукция по числу вершин.

В планарном графе есть вершина степени ≤ 5 — следствие оценки $E \leq 3V - 6$.

Удаляем её, раскрашиваем остаток по индукции, возвращаем: у пяти соседей занято не больше пяти цветов из шести.

Для пяти цветов то же рассуждение уже не проходит: пять соседей занимают все пять цветов, и требуется перекраска.

Для четырёх перекраска не спасает — и задача сопротивлялась век.

Теорема о четырёх красках

Карта — это планарный граф: страны — вершины, общая граница — ребро.

Теорема 5 (О четырёх красках)

Любой планарный граф 4-раскрашиваем.

Доказательство (Аппель и Хакен, 1976) — первое крупное компьютерное: 1936 конфигураций проверены программой, в 2005 году Гонтье формализовал его в Coq.

Формулировка честная: компьютерное доказательство в лекцию не входит.

Четыре — потолок и необходимость: K_4 планарен и требует ровно четыре цвета.

Раскраска и компиляторы

Переменные, живые одновременно, не могут делить регистр.

- Вершины графа — переменные программы.
- Ребро — конфликт: обе «живы» в одной точке.
- Цвета — регистры процессора.

Распределение регистров — это k -раскраска, NP-трудная задача.

Компиляторы (алгоритм Чайтина) живут эвристиками жадного типа и вытеснением в память.

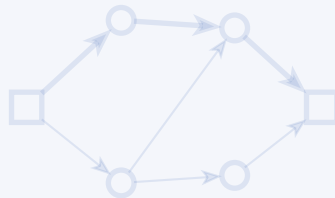
Та же модель назначает радиочастоты передатчикам и слоты экзаменам: помехи и общие студенты — рёбра.

Одна структура — куча расписаний.

Сетевые потоки

| *Всё течёт.*

— Гераклит



Водопровод

Насосная станция s качает воду в город t через узлы a и b .

- $s \rightarrow a$ пропускает 5 литров в секунду, $s \rightarrow b - 3$.
- $a \rightarrow t$ пропускает 3, $b \rightarrow t - 4$.
- Перемычка $a \rightarrow b - 2$.

Сколько воды дойдёт до города?

Ответ: 7 литров в секунду — и не каплей больше.

Рёбра $a \rightarrow t$ и $b \rightarrow t$ вместе пропускают $3 + 4 = 7$ — это горлышко.

Предел угадывается, алгоритм его находит.

Сеть и поток

Определение 5 (Сеть)

Ориентированный граф с источником s , стоком t и пропускными способностями $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Определение 6 (Поток)

Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, где:

- $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ — через ребро нельзя пройти больше его способности;
- в каждой вершине, кроме s и t , входящий поток равен исходящему — промежуточные вершины транзитны.

Определение 7 (Величина потока)

$|f|$ — чистый поток, выходящий из источника.

Разрезы

Определение 8 (Разрез)

Разрез (A, B) — разбиение вершин на два множества, где $s \in A$ и $t \in B$.

Пропускная способность $c(A, B)$ — сумма способностей рёбер из A в B .

Пример

В водопроводе разрез $A = \{s, a, b\}$, $B = \{t\}$ перерезает $a \rightarrow t$ и $b \rightarrow t$.

Его способность $3 + 4 = 7$.

Встречные рёбра из B в A в способность не входят: отрезаем сток, считаем дорогу к нему.

Поток ограничен разрезом

Теорема 6 (Поток через разрез)

Для любого потока f и любого разреза (A, B) :

$$f(A, B) = |f|.$$

Доказательство

Сложим закон сохранения по вершинам A : внутренние рёбра сократятся, останутся рёбра границы — это $f(A, B)$, и это же чистый поток из s .

Следствие 2 (Верхняя граница)

$$|f| = f(A, B) \leq c(A, B).$$

Величина любого потока не превосходит пропускной способности любого разреза.

Форд–Фалкерсон

Как найти максимальный поток?

Определение 9 (Остаточная сеть)

Для потока f остаточная сеть G_f несёт прямые рёбра с остатком $c(u, v) - f(u, v)$ и обратные рёбра с весом $f(u, v)$ — право отменить посланное.

1. Начать с нулевого потока.
2. Пока в остаточной сети есть путь s в t — **увеличивающий путь** — пропускать вдоль него минимум остаточных способностей.
3. Когда увеличивающих путей нет — поток максимален.

Обратные рёбра — умение передумать, как инверсия увеличивающего пути в паросочетаниях.

BFS-поиск пути даёт алгоритм Эдмондса–Карпа со сложностью $O(VE^2)$.

Максимальный поток равен минимальному разрезу

Теорема 7 (Макс-поток = мин-разрез)

Величина максимального потока равна минимальной пропускной способности разреза.

Доказательство (набросок)

Пусть алгоритм остановился, и A — вершины, достижимые из s в остаточной сети: рёбра из A в B насыщены, а из B в A пусты.

Поэтому $|f| = f(A, B) = c(A, B)$ — верхняя граница достигнута.

Максимум потока и минимум разреза совпадают — закон структуры сети.

Потоки вокруг

- Транспорт: максимальный грузопоток через сеть дорог.
- Паросочетания: источник к левой доле, сток от правой — максимальное паросочетание ищется потоком.
- Выбор проектов с зависимостями: минимальный разрез сам называет оптимальное множество.
- Интегральность: целые способности дают целочисленный максимальный поток — поэтому сведения выдают точные объекты, а не дроби.

Паросочетание здесь становится потоком с единичными способностями: один аппарат смотрит на сеть и как на перевозку, и как на распределение работ.

Потоки и код

- NetworkX в Python и lemon в C++ несут готовые максимальные потоки.
- Солверы линейного программирования решают потоки как частный случай.
- Балансировка нагрузки и выделение каналов — потоки в disguise.

В задаче выбора проектов ответом служит не поток, а сторона источника минимального разреза — так разрез становится множеством решений.

Лекция 4: что мы поняли?

- Планарность: формула Эйлера $V - E + F = 2$ даёт оценку $E \leq 3V - 6$, а K_5 и $K_{3,3}$ непланарны и запрещают все свои подразделения (Куратовский).
- Раскраска: жадный алгоритм укладывается в $\Delta + 1$ цветов, планарные графы требуют не более четырёх — доказано компьютером.
- Потоки: алгоритм Форда–Фалкерсона растёт увеличивающими путями, и максимальный поток равен минимальному разрезу.
- Графы прошли путь от связей до расчёта: один язык для сетей, расписаний, маршрутов и вычислений.

Вопросы для самопроверки

1. Проверьте формулу Эйлера для тетраэдра и для дерева из трёх вершин.
2. Почему $K_{3,3}$ не опровергается оценкой $E \leq 3V - 6$, но опровергается $E \leq 2V - 4$?
3. Почему в доказательстве шести цветов хватает следствия $E \leq 3V - 6$?
4. Что изменится в жадной раскраске, если порядок вершин выбрать неудачно?
5. Докажите, что $|f| \leq c(A, B)$ для любого потока и любого разреза.
6. Что означает остановка Форда–Фалкерсона в терминах остаточной сети? Как из неё прочесть минимальный разрез?

Чтение к следующей паре

- m09 — «Планарность», «Раскраска графов», «Сетевые потоки».
- Флеш-опросник — в начале лекции 5.
- Контрольная 1 (графы) — на этой неделе, на отдельной паре.