

10

Лекция

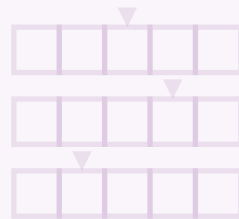
13–14 апреля

Универсальная машина

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027

Варианты и устойчивость



Вопрос, могут ли машины думать, примерно так же актуален, как вопрос, умеют ли подводные лодки плавать.

— Эдсгер Дейкстра

Произвол в определении

В семёрке легко заподозрить произвол:

- лента бесконечна в обе стороны
- головка сдвигается ровно на одну клетку
- за шаг выполняется ровно одно правило.

Каждое решение можно было принять иначе: односторонняя лента, сдвиг на месте, несколько лент, недетерминированный выбор.

Если бы класс вычислимого зависел от этих деталей, слово «вычислимо» описывало бы одну конструкцию, а не понятие.

Многоленточная машина

Определение 1 (Многоленточная МТ)

k лент и k головок: за один шаг каждая головка читает, пишет и сдвигается независимо.

Симуляция на одной ленте: содержимое всех лент переплетается по дорожкам, позиции головок помечаются маркерами.

Один шаг исходной машины — обход занятой части общей ленты.

Цена симуляции

После $T(n)$ шагов многоленточной машины занятая часть ленты занимает $O(T(n))$ клеток.

Каждый шаг симуляции обходит её целиком: итог $O(T(n)^2)$ шагов.

Плата за удобство — время, а не сила.

Все оценки в этом модуле — о принципиальной возможности, поэтому квадратичный множитель не меняет выводов.

Недетерминированная машина

Определение 2 (НМТ)

δ возвращает множество возможных шагов.

Машина принимает вход, если хотя бы одна ветвь вычисления достигает q_{accept} .

Выглядит как угадывание — на деле квантор существования.

Почему обход в ширину?

Детерминированная симуляция НМТ обходит дерево конфигураций в ширину: все ветви продвигаются по одному шагу.

Глубинный обход рискует навсегда уйти в бесконечную ветвь и пропустить принимающую.

Ширина дерева ограничена: из вершины выходит не более b переходов, поэтому на глубине t не более b^t вершин.

Плата — экспонента, но для вопроса «принимает ли» важна возможность, а не скорость.

Устойчивость модели

Теорема 1 (Эквивалентность вариантов)

Односторонняя лента, сдвиг на месте, k лент и недетерминизм вычисляют тот же класс языков, что и одноленточная детерминированная МТ.

То же верно для двухстековых и счётчиковых машин и регистровых машин.

Доказательство

Докажем симуляцией: для каждой модификации опишем базовую машину, воспроизводящую её работу шаг за шагом.

Односторонняя лента укладывается двумя дорожками — правая половина и отражённая левая с граничным маркером.

Сдвиг на месте заменяется парой шагов через свежее состояние: влево и обратно вправо.

Устойчивость модели [2]

Несколько лент переплетаются дорожками с маркерами головок — как на прошлых слайдах.

Недетерминизм обходится поиском в ширину по дереву конфигураций.

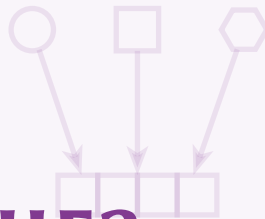
Сила модели определяется задачами, а не деталями конструкции.

О вычислимости можно говорить без указания на версию машины.

Тезис Чёрча–Тьюринга

Впервые удалось дать абсолютное определение интересного эпистемологического понятия — понятия, не зависящего от выбранного формализма.

— Курт Гёдель



Вычислимая функция

Определение 3 (Вычисление функции)

МТ **вычисляет** функцию $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$, если на входе w она останавливается с $f(w)$ на ленте в точности тогда, когда $f(w)$ определено.

Функция может быть частичной: где не определена — машина не останавливается вовсе.

Функция, определённая на всех словах, называется всюду определённой (*total*).

Тезис

Тезис Чёрча–Тьюринга: класс функций, вычислимых на МТ, совпадает с классом интуитивно вычислимых функций.

Практическое правило: если задача неразрешима на МТ, она неразрешима нигде.
Ни на другом языке, ни на другой архитектуре, ни на суперкомпьютере.

Чем тезис не является?

Тезис — не теорема.

Теорема связывает два формальных объекта, а «интуитивно вычислимая функция» формальна не больше, чем наши представления о любом конечном процессе.

Статус другой: принятое определение понятия «алгоритм», проверяемое опытом.

Проверка идёт с двух сторон: все независимые формализмы сходятся к одному классу, а процедура, вычисляющая что-то вне его, за девяносто лет не предъявлена.

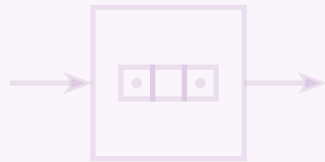
Три формализма 1936 года

Одна и та же граница вычислимого найдена трижды и независимо:

Формализм	Чем торгует
Машина Тьюринга	лента, головка, состояния
Лямбда-исчисление Чёрча	подстановка вместо ленты
Общерекурсивные функции Гёделя	композиция и минимизация вместо переходов

Гёделя убедила именно механическая наглядность МТ: лента и клетки — буквально человек с бумагой.

Позже тот же класс дали клеточные автоматы и другие модели — счёт формализмов растёт, класс один.



Универсальная машина

Лучший способ предсказать будущее — изобрести его.

— Алан Кэй

Сколько существует машин?

Каждая МТ — конечная строка символов: её таблица переходов записывается текстом.

Строк конечного алфавита счётное число — в первом семестре мы считали такие множества.

Машин $\aleph_0$, а языков $2^{\aleph_0}$ — континуум.

Значит, почти все языки не распознаваемы никакой машиной: невычислимого неизмеримо больше, чем вычислимого.

Программа как данные

Таблицу переходов кодируют строкой: состояния, символы и направления получают номера, каждый переход — пятёрка (q, a, q', b, d) .

Вся машина — текст $\langle M \rangle$, и его можно положить на ленту как вход.

Программа — те же символы, которые машина читает как данные.

Различие программы и данных — соглашение, а не свойство природы вычисления.

Теорема об универсальной машине

Теорема 2 (Универсальная МТ)

Существует машина U , которая по кодировке $\langle M \rangle$ и строке w симулирует работу M на w .

U принимает, отвергает и заикливается ровно тогда, когда это делает M .

Набросок: три дорожки на ленте — программа, текущее содержимое ленты M , текущее состояние с маркером головки.

Каждый шаг U : найти в таблице подходящую пятёрку и обновить дорожки — написание эмулятора на ассемблере.

Хранимая программа

Универсальная машина Тьюринга — 1936 год.

Архитектура фон Неймана, где программа и данные живут в общей памяти, — 1945 год.

В телевизоре и в стиральной машине стоит одна и та же электронная схема — различает их только программа.

Одна машина, много программ — это и есть замысел Тьюринга.

Интерпретаторы и квайны

Универсальная МТ — прообраз интерпретатора: программы, читающей и исполняющей другие программы.

- виртуальные машины — Java, .NET, WebAssembly
- эмуляторы процессоров
- шеллы и REPL.

Куайн — программа, печатающая собственный текст.

Самоприменимость — не курьёз, а свойство мира, где программы суть данные.

Программы о программах

Программа, анализирующая программу, — обычное дело:

- антивирус решает, опасен ли файл
- статический анализатор ищет ошибки без запуска
- верификатор доказывает свойства кода.

Вопрос «что сделает эта программа с этой?» — центральный вопрос всей теории вычислимости.

В первом семестре проверка свойств схем сводилась к SAT. С машинами на ленте вопрос станет глубже — и ответ суровее.

Лекция 10: что мы поняли?

- Варианты МТ — многоленточность, недетерминизм, альтернативные памяти — симулируются базовой машиной: меняется только время.
- Тезис Чёрча–Тьюринга — принятое определение вычислимости, а не теорема: одна из его сторон неформальна.
- Машин счётное число, языков — континуум: невычислимого больше, чем вычислимого.
- Универсальная машина исполняет любую программу: программа — данные. Это замысел хранимой программы и прообраз интерпретатора.

Вопросы для самопроверки

1. Почему многоленточная МТ не сильнее одноленточной и во сколько раз замедляет симуляция?
2. Почему симуляция недетерминированной МТ идёт в ширину, а не в глубину?
3. Сформулируйте тезис Чёрча–Тьюринга и объясните, почему он не теорема.
4. Что такое частичная вычислимая функция?
5. Почему машин счётное число и что это говорит о языках?
6. Как устроена универсальная машина и что лежит у неё на ленте?
7. Приведите три примера «программы о программе» из инженерной практики.

Чтение к следующей паре

- m25 — «Устойчивость и варианты», «Тезис Чёрча–Тьюринга», «Универсальная машина Тьюринга».
- Флеш-опросник — в начале лекции 11.