

13

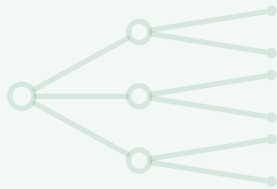
Лекция

4–5 мая

Правила счёта

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027



Правила счёта

Математик, как художник или поэт, создаёт узоры.

— Годфри Харди

Сколько всего вариантов?

Сколько паролей можно составить из латиницы и цифр?

Сколькими способами раздаются карты в покере?

Каждый такой вопрос — о количестве объектов, которые можно не перечислять, а посчитать.

Колода из 52 карт укладывается на столе $52! \approx 8 \cdot 10^{67}$ способами — это больше, чем звёзд в наблюдаемой Вселенной.

Перебор бессилен.

Комбинаторика заменяет перечисление формулой.

Правило суммы

Определение 1 (Правило суммы)

Если конечные множества A и B не пересекаются, то

$$A \cap B = \emptyset : |A \cup B| = |A| + |B|.$$

Действия взаимоисключающие — варианты складываются.

Пример

В столовой 3 супа и 4 салата, выбрать нужно ровно одно блюдо: $3 + 4 = 7$ вариантов.

Сложение безопасно ровно потому, что случаи не пересекаются: каждый вариант посчитан один раз.

Правило произведения

Определение 2 (Правило произведения)

Если выбор распадается на последовательные шаги и шаги дают $k_1, k_2, \dots, k_m$ вариантов, то всего

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m$$

вариантов, то есть $|A_1 \times \dots \times A_m| = |A_1| \dots |A_m|$.

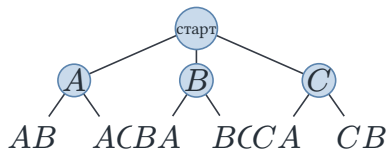
Пример (Пароль)

2 буквы латиницы и 4 цифры в фиксированных позициях: $26^2 \cdot 10^4 = 6760000$ вариантов.

Шаги складываются в случай, а перемножаются в последовательности.

Дерево решений

Комбинаторный объект — это путь в дереве решений.



Перестановки трёх объектов: 3 варианта на первое место, 2 на второе, 1 на последнее.

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ путей от корня до листьев.

Перебор в коде — обход того же дерева: рекурсия с возвратом.

Формула правила произведения считает листья дерева, не строя его.

Правило дополнения

Определение 3 (Правило дополнения)

Если $A \subseteq U$, то $|A| = |U| - |\bar{A}|$.

Пример

Сколько 8-битных строк содержат хотя бы одну единицу?

Всего строк $2^8 = 256$, строк без единиц — одна.

Ответ: $256 - 1 = 255$.

Правило выручает, когда посчитать «не- A » проще, чем само A .

Шары и ящики

Многие задачи — о разложении n шаров по k ящикам.

Разложить шары по различным ящикам — всё равно что задать функцию из n шаров в k ящиков.

Ответ зависит от того, различимы ли шары и различимы ли ящики.

Хеш-таблица — та же задача: ключи — шары, корзины — ящики.

При $n > k$ коллизия неизбежна, а при равномерном хешировании корзины собирают около $\frac{n}{k}$ ключей.

Четыре ситуации подсчёта

Шары	Ящики	Способов
различные	различные	k^n — каждый шар выбирает ящик
неразличимые	различные	$\binom{n+k-1}{n}$ — звёзды и перегородки
различные	неразличимые	$S(n, 1) + \dots + S(n, k)$ — числа Стирлинга 2-го рода
неразличимые	неразличимые	$\sum_{i=1}^k p_i(n)$ — разбиения числа n не более чем на k частей

Одна таблица — четыре формулы: сначала спрашиваем про различимость, потом считаем.

Числа Стирлинга и разбиения вернутся в лекции о рекурренциях.

Звёзды и перегородки

Определение 4 (Звёзды и перегородки (*stars and bars*))

n неразличимых шаров по k различным ящикам можно разложить

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

способами.

Записываем n звёздочек и $k-1$ перегородку: перегородки делят звёздочки на группы по ящикам.

Всего позиций $n+k-1$, из них $k-1$ занимают перегородки.

Пример (Дюжина бубликов)

Дюжина бубликов из 4 сортов: $\binom{12+4-1}{3} = \binom{15}{3} = 455$ раскладок.

Различимые шары, неразличимые ящики

Ящики без имён: раскладки, отличающиеся перестановкой ящиков, — одна и та же.

Считают числа Стирлинга второго рода $S(n, k)$ — разбиения n шаров на k непустых блоков.

Пример

Трое различных студентов заселяются в две одинаковые комнаты без пустых:

$$S(3, 2) = 3.$$

Один живёт один, двое вместе — и одиночкой может оказаться любой из троих.

Если пустые ящики разрешены, добавляются суммы $S(n, 1) + \dots + S(n, k)$.

Неразлично всё

Шары и ящики без имён: остаются только размеры групп.

Разложить число n на слагаемые без учёта порядка — разбиение числа.

Пример

$n = 4$: разбиений пять — $4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1$.

Четыре формулы таблицы — это не четыре факта для запоминания, а один вопрос: *что здесь различимо?*



Правила счёта

Я давно получил свои результаты, но ещё не знаю, как к ним прийти.

— Карл Фридрих Гаусс

Принцип Дирихле

Определение 5 (Принцип Дирихле (*pigeonhole principle*))

Если n объектов разложены по m ящикам и $n > m$, то хотя бы в одном ящике не менее двух объектов.

Обобщённая форма: найдётся ящик с не менее чем $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ объектами и ящик с не более чем $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$.

На языке функций: если $|A| > |B|$, инъекции $f : A \rightarrow B$ не существует.

По смыслу — теорема существования: объект объявляется, но не предъявляется.

Классика: дни рождения и носки

Пример

Среди 367 человек найдутся двое с общим днём рождения: дат 366, а людей больше.

Среди 5 носков трёх цветов найдутся два одного цвета.

Классика иллюстрирует принцип, но не показывает его силу.

Сила появляется там, где ящики не видны с первого взгляда, — этим задачам и дальше вся лекция.

Где ящики?

Сила принципа — в задачах, где ящики нужно *увидеть*.

Пример

В Москве более двенадцати миллионов жителей, а значений числа волос на голове не больше 150001: двое с одинаковым числом волос найдутся.

Пример

В любом графе на $n \geq 2$ вершинах есть две вершины одной степени.

Степень принимает значения от 0 до $n - 1$, но нулевая и полная степени несовместимы: значений $n - 1$, вершин n .

Рецепт один: спросить, кто здесь голубь и что здесь ящик.

Замошение доски

Пример (Доска без углов)

Из шахматной доски вырезали два противоположных угла.

Можно ли замостить остаток домино 1×2 ?

Вырезанные углы одного цвета: светлых клеток осталось 30, тёмных — 32.

Каждое домино накрывает ровно одну светлую и одну тёмную клетку: домино — голуби, светлые клетки — ящики.

31 домино требует 31 светлую клетку, а их 30 — замощение невозможно.

Пять точек в квадрате

Обобщённая форма отвечает и на вопрос *сколько*.

Пример

Среди любых 5 точек единичного квадрата есть две на расстоянии не более $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Разрежем квадрат на 4 квадрата со стороной $\frac{1}{2}$: в одном из них $\lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$ точки, а его диагональ равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ящик — малый квадрат, голуби — точки.

Теорема Эрдёша—Секереша

Теорема 1 (Эрдёш—Секереш)

Из $n^2 + 1$ различных чисел можно выбрать возрастающую или убывающую подпоследовательность длины $n + 1$.

Каждому числу сопоставим пару: длина наибольшей возрастающей и наибольшей убывающей подпоследовательности, заканчивающихся в нём.

Пар всего n^2 , а чисел $n^2 + 1$: у двух чисел пары совпадают — значит, цепочка продолжается, и подпоследовательность растёт до $n + 1$.

Весь разбор — в умении *придумать* ящики: здесь ими оказались пары длин.

Почему сжатие без потерь невозможно?

Пусть алгоритм сжимает каждый вход длины n в выход длины $m < n$.

Входов 2^n , выходов 2^m .

Голуби — входы, ящики — выходы: два разных входа попадают в один выход.

По такому выходу вход не восстановить — алгоритма сжатия без потерь не существует.

Это конечный вариант того же подсчёта, что в теореме Кантора о булеане: $2^r > r$ — множество всех подмножеств строго больше самого множества.

Существование без конструкции

Дирихле объявляет: объект есть.

Какой именно — принцип не говорит, и иногда сказать невозможно: пары москвичей с равным числом волос мы не назовём.

Неконструктивное существование — не слабость, а отдельный жанр доказательства.

В финале модуля этот ход вырастет в теорию Рамсея: гарантия структуры, которую мы не умеем строить.

Лекция 13: что мы поняли?

- Правило суммы складывает взаимоисключающие случаи, правило произведения перемножает последовательные шаги, правило дополнения считает «не- A ».
- Комбинаторный объект — путь в дереве решений, и формула произведения считает его листья.
- Шары и ящики — четыре формулы под одним вопросом «что различимо»: k^n , звёзды и перегородки, числа Стирлинга, разбиения.
- Принцип Дирихле: при $n > t$ найдётся ящик с $\left\lceil \frac{n}{t} \right\rceil$ объектами — существование без конструкции.
- Тем же подсчётом доказана невозможность сжатия без потерь: 2^n входов не помещаются в 2^m выходов.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько есть строк из 3 букв и 3 цифр, если буквы и цифры не перемешиваются?
2. Сколько существует способов раздать 20 одинаковых конфет четырём детям?
3. Почему в любом графе на $n \geq 2$ вершинах степени двух вершин совпадают?
4. Что играет роль голубей и что — ящиков в задаче о доске без двух углов?
5. Как принцип Дирихле доказывает невозможность сжатия без потерь?

Чтение к следующей паре

- m18 — «Правила подсчёта», «Шары и ящики», «Принцип Дирихле».
- Флеш-опросник — в начале лекции 14.