

Лекция

11–12 мая

Бином и включение- исключение

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027

Перестановки и сочетания



Делить каждую из рассматриваемых трудностей на столько частей, сколько требуется, чтобы их лучше разрешить.

— Рене Декарт

Перестановки

Определение 1 (Перестановка)

Упорядочение n различных объектов.

Число перестановок: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, соглашение $0! = 1$.

Факториал растёт стремительно: $5! = 120$, $10! = 3628800$, $20! \approx 2.43 \cdot 10^{18}$.

Формула Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Для $n = 20$ погрешность — полпроцента, а в анализе алгоритмов такой точности хватает всегда.

Соглашение $0! = 1$ кодирует единственность пустой перестановки — без него перестали бы работать рекуррента и бином.

Матрица выбора

Перестановки, размещения и сочетания различаются ответами на два вопроса: важен ли порядок и разрешены ли повторения.

	Повторения запрещены	Повторения разрешены
Порядок важен	$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Порядок не важен	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Одна таблица вместо четырёх формул: каждая клетка — ответ на два вопроса.

Звёзды и перегородки уже считали правую нижнюю клетку.

Размещения

Определение 2 (Размещение (*k*-permutation))

Выбор k из n с учётом порядка:

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Правило произведения в чистом виде: на первое место n кандидатов, на второе $n - 1$, на последнее $n - k + 1$.

Пример

Пьедестал (золото, серебро, бронза) из 10 участников: $P(10, 3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Сочетания

Определение 3 (Сочетание)

Выбор k из n без учёта порядка:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P(n, k)}{k!}.$$

Каждое сочетание даёт $k!$ размещений — перестановок выбранных элементов, — поэтому делим.

Пример

Комитет из 3 человек из 10 кандидатов: $\binom{10}{3} = 120$.

Рукопожатия в компании из n : наивный подсчёт даёт n^2 , но пара $A-B$ совпадает с $B-A$, а рукопожатий с собой нет — $\frac{n^2-n}{2} = \binom{n}{2}$.

Сочетания с повторениями

Определение 4 (Сочетания с повторениями)

Выбор k элементов из n типов без учёта порядка: $\binom{n+k-1}{k}$.

Формула — те же звёзды и перегородки: k звёздочек и $n - 1$ перегородка между типами.

То же число — решений уравнения $x_1 + \dots + x_n = k$ в неотрицательных целых.

Пример

Три шарика мороженого из 5 сортов: $\binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$.

Перестановки с повторениями

Определение 5 (Перестановки с повторениями)

Если среди n объектов n_1 копий первого типа, n_2 — второго и так далее, число перестановок

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

— мультиномиальный коэффициент.

Перестановок различных объектов было бы $n!$, но копии одного типа неотличимы — каждый тип делит ответ на $n_i!$.

Пример

Анаграммы слова БАЛАЛАЙКА: 9 букв, из них А — 4 раза, Л — 2: $\frac{9!}{4! \cdot 2!} = 7560$.

Бином и включение- исключение



*Последний шаг разума — признать, что есть бесконечное
число вещей, его превосходящих.*

— Блез Паскаль

Бином Ньютона

Теорема 1 (Биномиальная теорема)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

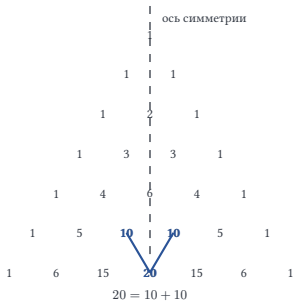
Слагаемое $x^{n-k}y^k$ получается, когда буква y выбирается ровно в k из n скобок — $\binom{n}{k}$ способами.

Пример

Подстановка $x = y = 1$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ — число всех подмножеств.

Пример

Подстановка $x = 1, y = -1$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ при $n \geq 1$.



Каждая строка — биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Строка зеркальна: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ – выбрать k включаемых или $n - k$ исключаемых, это одно подмножество.

Тождество Паскаля

Теорема 2 (Тождество Паскаля)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Доказательство

Докажем разбором случаев: входит ли фиксированный элемент в выборку.

Если входит — осталось выбрать $k - 1$ из $n - 1$ остальных: $\binom{n-1}{k-1}$ способов.

Если не входит — все k выбираются из $n - 1$: $\binom{n-1}{k}$ способов.

Каждое число треугольника — сумма двух над ним.

Хоккейная клюшка и Вандермонд

- Хоккейная клюшка: $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ — подмножества размера $k+1$ из $\{0, \dots, n\}$ группируются по наибольшему элементу.
- Свёртка Вандермонда: $\binom{m+n}{r} = \sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$ — выбрать r из m математиков и n физиков, взяв k из первых.

Пример

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 = \binom{6}{3}.$$

Тождество доказывается комбинаторно: обе стороны считают одно и то же множество двумя маршрутами.

Такой подсчёт объясняет, *почему* тождество верно, — раскрытие скобок этого не даёт.

Бином в анализе алгоритмов

Вложенный цикл «каждый с каждым» делает $\binom{n}{2} = n \frac{n-1}{2}$ сравнений — это $O(n^2)$.

Полный перебор подмножеств — $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ масок, триллионы уже при $n = 40$.

Теорема 3 (Взвешенная сумма)

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Доказательство

Посчитаем пары «подмножество и отмеченный в нём элемент» двумя способами.

Для каждого размера k пар даёт $k \binom{n}{k}$, метку выбираем n способами, а остальные $n - 1$ элементов решают независимо: $n 2^{n-1}$ пар.

Средний размер подмножества — $\frac{n}{2}$, и это видно из формулы.

Пути на решётке

Сколько путей из $(0, 0)$ в (n, n) шагами вправо и вверх?

Всего шагов $2n$, из них ровно n вправо — расставляем буквы «вправо» по позициям: $\binom{2n}{n}$.

Тот же ответ даёт динамическое программирование: $d[i][j] = d[i-1][j] + d[i][j-1]$.

Число путей в графе без циклов считается одним проходом по топологическому порядку — тот же приём, что в обходах и Дейкстре из начала семестра.

Комбинаторика даёт готовую формулу там, где динамика даёт алгоритм.

Включение-исключение: два множества

Теорема 4

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Правило суммы ломается на пересекающихся множествах: элементы пересечения посчитаны дважды.

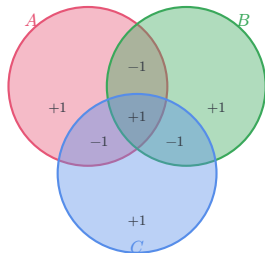
Поправка — вычесть пересечение один раз.

Пример

Из 40 студентов 20 знают Python, 15 — Rust, 7 знают оба.

Знают хотя бы один язык: $20 + 15 - 7 = 28$.

Три множества



$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Знаки чередуются: одиночные множества плюс, пары минус, тройка плюс.

Тройное пересечение вычиталось трижды и прибавлялось трижды — его нужно вернуть ещё раз.

Общая формула

Теорема 5 (Включение-исключение (*inclusion-exclusion*))

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k+1} \sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| - \dots$$

Доказательство

Докажем, проверив вклад одного элемента: пусть x принадлежит ровно k множествам. Он посчитан $\binom{k}{1}$ раз в одиночных суммах, $\binom{k}{2}$ — в парных, и так далее со знаками через один:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1,$$

то есть ровно один раз, в скольких бы множествах он ни лежал.

Почему знаки чередуются?

Выражение $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots$ — это $1 - (1 - 1)^k$: сумма строки бинома с чередующимися знаками.

Биномиальная алгебра из этой же лекции превращает формулу включений-исключений из трюка в теорему.

Одна формула — два взгляда: комбинаторный подсчёт вкладов и биномиальное тождество.

Делители

Пример (Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 2, 3 или 5?)

$$\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50, \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20.$$

$$\text{Пары: } \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16, \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10, \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6.$$

$$\text{Тройка: } \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3.$$

$$\text{Итого: } 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74.$$

Пересечения множеств стали делимостью на произведения — включение-исключение умеет считать и в теории чисел.

Беспорядки

Пример (Беспорядки (*derangements*))

Переписать n писем в n конверты так, чтобы ни одно письмо не попало в свой конверт:

$$!n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e}.$$

A_i — перестановки, где письмо i на своём месте: $|A_i| = (n-1)!$, пары дают $(n-2)!$ и так далее — включение-исключение собирает ответ.

Доля беспорядков стремится к $\frac{1}{e} \approx 0.368$: уже $!6 = 265$ из $6! = 720$.

Лекция 14: что мы поняли?

- Матрица выбора: порядок важен или нет, повторения разрешены или нет — четыре формулы от n^k до $\binom{n+k-1}{k}$.
- Бином Ньютона переводит выбор подмножеств в коэффициенты, треугольник Паскаля устроен тождеством $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- Тождества (сумма строки 2^n , клюшка, Вандермонд) доказываются двойным подсчётом: обе стороны считают одно множество.
- Пути на решётке считаются формулой $\binom{2n}{n}$ и одной строкой динамики — это одна и та же рекурсия.
- Включение-исключение исправляет двойной счёт чередующимися знаками: каждый элемент выживает ровно один раз.

Вопросы для самопроверки

1. Почему $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}$?
2. Сколько анаграмм у слова МАТЕМАТИКА?
3. Докажите $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ двумя способами.
4. Что означает тождество Вандермонда в терминах выбора из двух групп?
5. Сколько чисел от 1 до 30 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
6. Почему доля беспорядков среди перестановок стремится к $\frac{1}{e}$?

Чтение к следующей паре

- m18 — «Перестановки, размещения, сочетания», «Биномиальные коэффициенты и тождества», «Принцип включений-исключений».
- Флеш-опросник — в начале лекции 15.
- Контрольная 4 (комбинаторика и производящие функции) — на следующей неделе, на отдельной паре.