

15

Лекция

18–19 мая

Рекурренции и производящие функции

Константин Чухарев

Дискретная математика — Весна 2027



Рекуррентные соотношения

Мы можем видеть лишь небольшое расстояние вперёд, но можем видеть там много такого, что нужно сделать.

— Алан Тьюринг

Откуда берутся рекурренты?

Многие величины проще определить через предыдущие, чем напрямую.

Определение 1 (Линейная рекуррента)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

— линейная рекуррента порядка k с постоянными коэффициентами, $c_k \neq 0$.

Начальные условия $a_0, \dots, a_{k-1}$ задают последовательность однозначно.

Пример

Лестница из n ступеней: шагаем на одну или на две.

Способов добраться: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ — на последнюю ступень приходим с соседней или перескоком.

Числа Фибоначчи

Определение 2 (Числа Фибоначчи)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1 :$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Лестница из n ступеней обходится F_{n+1} способами.

Числа Фибоначчи растут экспоненциально — $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, где $\varphi \approx 1.618$, — и точная формула у нас уже близко.

Вопрос лекции: как от рекурренты перейти к явной формуле?

Наивная рекурсия и мемоизация

```
// Наивно: экспоненциальный перебор дерева вызовов.  
fn fib_naive(n: u64) -> u64 {  
    match n {  
        0 => 0,  
        1 => 1,  
        _ => fib_naive(n - 1) + fib_naive(n - 2),  
    }  
}
```

```
// Снизу вверх: линейное время, константная память.  
fn fib(n: u64) -> u64 {  
    let mut f = (0, 1);  
    for _ in 0..n {  
        f = (f.1, f.0 + f.1);  
    }  
}
```

Наивная рекурсия и мемоизация [2]

```
f.0  
}
```

Наивная рекурсия пересчитывает одни и те же значения — дерево вызовов раздваивается, $O(2^n)$.

Мемоизация и ход снизу вверх считают каждое значение один раз — $O(n)$.

Замкнутая формула отвечает за $O(1)$ арифметических операций — ради неё и строится теория.

Характеристическое уравнение

Проба: ищем решение в виде $a_n = r^n$.

Подстановка в $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ даёт $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$, после деления на r^{n-2} :

$$r^2 = r + 1.$$

Корни: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Любая комбинация $\alpha\varphi^n + \beta\psi^n$ — решение, коэффициенты подбираются по начальным условиям.

Характеристическое уравнение рекурренты $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0.$$

Формула Бине

Теорема 1 (Формула Бине)

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство

Ищем решение вида $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$.

Из $F_0 = 0$: $\alpha + \beta = 0$.

Из $F_1 = 1$: $\alpha\varphi + \beta\psi = 1$, откуда $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Из иррациональных слагаемых при каждом n выходит целое: φ^n и ψ^n отличаются ровно на $\sqrt{5}F_n$.

Кратные корни

Если корень r характеристического уравнения имеет кратность m , в решение входят $r^n, nr^n, \dots, n^{m-1}r^n$.

Пример

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 4.$$

Характеристическое уравнение $(r - 2)^2 = 0$: корень 2 кратности 2.

Решение $a_n = (\alpha + \beta n)2^n$, начальные условия дают $\alpha = 1, \beta = 1$: $a_n = (n + 1)2^n$.

Проверка: $a_2 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 12 = 3 \cdot 2^2$.

Неоднородные рекурренты

Если справа не ноль, а функция от n — рекуррента неоднородна.

Рецепт: общее решение однородной части плюс *частное решение* всей рекурренты, угаданное по виду правой части.

Пример

$$a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1.$$

Однородное решение α ; частное ищем среди многочленов: $n \frac{n+1}{2}$.

$$\text{Ответ: } a_n = 1 + n \frac{n+1}{2}.$$

Характеристический метод требует угадывания — на следующей лекции ОПФ угадывать не будет.

Рекурренты и алгоритмы

Время сортировки слиянием: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$.

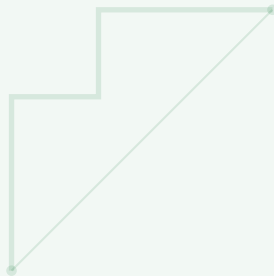
Подстановка $n = 2^k$ даёт линейную рекурренту $t_k = 2t_{k-1} + 2^k$, и её решение — $t_k = k2^k$.

Итого $T(n) = n \log_2 n$ — знакомый $O(n \log n)$.

Основная теорема (*master theorem*) сравнивает стоимость разделения $f(n)$ с числом листьев $n^{\log_b a}$: кто растёт быстрее, тот и диктует ответ.

Рекуррента — основной язык анализа рекурсивных алгоритмов.

Числа Каталана, Стирлинга и Белла



*Числа Каталана — вероятно, самая вездесущая
последовательность чисел в математике.*

— Ричард Стэнли

Числа Каталана

Определение 3 (Числа Каталана)

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} : 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$$

Формула делит центральный биномиальный коэффициент на $n + 1$ — и это не случайность.

Скобки в выражениях, формы деревьев, разрезы многоугольников — во всех этих задачах ответом оказываются C_n .

Стэнли насчитал более двухсот комбинаторных интерпретаций — с основными познакомимся сейчас.

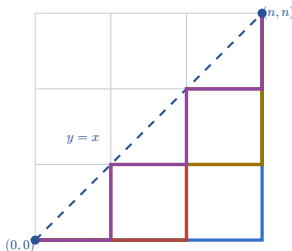
Пять лиц Каталана

$C_3 = 5$ — и вот пять объектов каждого сорта:

1. Скобочные последовательности из 3 пар: $((()))$, $((()))$, $(())()$, $()(())$, $()()()$
2. Бинарные деревья с 3 внутренними узлами.
3. Триангуляции выпуклого пятиугольника непересекающимися диагоналями.
4. Пути из $(0, 0)$ в $(3, 3)$, не поднимающиеся выше диагонали.
5. Расстановки скобок в произведении четырёх матриц — от них зависит число умножений.

Разные задачи — один ряд чисел: узнали структуру, сосчитали раз и навсегда.

Тропинки и диагональ



Пути из $(0, 0)$ в (n, n) шагами вправо и вверх — $\binom{2n}{n}$ из прошлой лекции.

Каталановы пути — те, что не поднимаются выше диагонали $y = x$.

Из $\binom{2n}{n}$ путей законных $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$: при $n = 3$ — пять из двадцати.

Отражение «запрещённого хвоста» относительно диагонали показывает, что нарушителей ровно $\frac{n}{n+1}$ от всех, — вывод на практике.

Рекуррента Каталана

Теорема 2 (Рекуррента Каталана)

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

Бинарное дерево с $n + 1$ узлами: удаление корня оставляет левое поддереву с i узлами и правое с $n - i$.

Правило произведения даёт $C_i C_{n-i}$, правило суммы собирает свёртку по всем разрезам.

Правая часть — *свёртка* последовательности с собой. Запомним это для производящих функций.

Числа Стирлинга: два рода

Определение 4 (Числа Стирлинга)

Второго рода: $S(n, k)$ — разбиения n -элементного множества на k непустых блоков.

Первого рода: $c(n, k)$ — перестановки n элементов с ровно k циклами.

Рекурренты: $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$ и $c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k)$.

Обе рекурренты спрашивают о судьбе n -го элемента: отдельная группа — или присоединиться к готовой.

Проверка на $n = 3$: $S(3, 2) = 3$, $c(3, 1) = 2$, $c(3, 2) = 3$, $c(3, 3) = 1$ — и $2 + 3 + 1 = 3!$.

Числа Белла

Определение 5 (Числа Белла)

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

— число всех разбиений n -элементного множества: 1, 1, 2, 5, 15, 52, ...

Каждое разбиение задаёт отношение эквивалентности, и наоборот — значит, B_n считает и эквивалентности.

Разбиения множеств из первого семестра получают счётную формулу.

Разбиения множества вернулись из таблицы «шаров и ящичков»: различимые шары по неразличимым ящикам — это суммы $S(n, k)$.



Обычные производящие функции

Производящая функция — это верёвка, на которую мы вешаем последовательность чисел для просушки.

— Герберт Уилф

Кости и многочлены

Игральная кость упаковывается в многочлен:

$$D(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Показатель — сумма на грани, коэффициент — число способов её получить.

Две кости: $D(x)^2$, и коэффициент при x^7 равен 6 — столько пар дают сумму 7.

Умножение многочленов считает комбинации: показатели складываются, $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$.

Обычная производящая функция

Определение 6 (ОПФ (*ordinary generating function*))

Ряд

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

— обычная производящая функция последовательности (a_n) ; коэффициент:
 $[x^n]A(x) = a_n$.

Пример

Последовательности $(1, 2, 3, 0, \dots)$ отвечает $1 + 2x + 3x^2$: $[x^0]A = 1$, $[x^1]A = 2$, $[x^2]A = 3$.

x — формальный символ: сходимость не важна, важны коэффициенты.

Таблица базовых рядов

a_n	$A(x)$
1	$\frac{1}{1-x}$
n	$\frac{x}{(1-x)^2}$
$\binom{k}{n}$	$(1+x)^k$
$\binom{n+k-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^k}$
c^n	$\frac{1}{1-cx}$

Всё выводится из суммы геометрической прогрессии $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$.

Замена $x \rightarrow cx$ и дифференцирование дают остальные строки.

Сдвиги и свёртка

Умножение на x сдвигает последовательность: перед ней встаёт ноль.

Произведение рядов — свёртка последовательностей: $[x^n]A(x)B(x) = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

Деление на $(1 - x)$ даёт частичные суммы: $\frac{A(x)}{1-x} = \sum s_n x^n$, где $s_n = a_0 + \dots + a_n$.

Рекуррента — это уравнение на $A(x)$: свёртка уже превращала рекурренту Каталана в $C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}$.

На следующей лекции решим числа Фибоначчи этим методом по-настоящему.

Лекция 15: что мы поняли?

- Рекуррента плюс начальные условия задают последовательность, характеристическое уравнение превращает её в формулу: $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
- Наивная рекурсия для Фибоначчи — $O(2^n)$, мемоизация — $O(n)$, замкнутая формула — константа арифметики.
- Числа Каталана $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ считают скобки, деревья, триангуляции и тропинки — и живут рекуррентой-свёрткой.
- Числа Стирлинга и Белла считают разбиения множеств — то есть отношения эквивалентности из первого семестра.
- ОПФ упаковывает последовательность в ряд: сдвигу отвечает умножение на x , свёртке — произведение.

Вопросы для самопроверки

1. Почему число способов подняться по лестнице из n ступеней шагами 1 и 2 — число Фибоначчи?
2. Решите $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ с $a_0 = 1, a_1 = 5$.
3. Перечислите пять скобочных последовательностей из трёх пар скобок.
4. Почему рекуррента Каталана — свёртка последовательности с собой?
5. Сколько разбиений у трёхэлементного множества и сколько среди них с двумя блоками?
6. Что означает запись $[x^n]A(x)$ и чему равна ОПФ последовательности $(1, 1, 1, \dots)$?

Чтение к следующей паре

- m18 — «Рекуррентные соотношения», «Числа Каталана», «Числа Стирлинга и Белла».
- m21 — «Обычные производящие функции».
- Флеш-опросник — в начале лекции 16.
- Теормин 2 (комбинаторика и трансфинитные числа, устно) — на следующей неделе, на отдельной паре. Трансфинитные числа — самостоятельное чтение.