

Лекция

25–26 мая

Бёрнсайд и Рамсей



Решение рекуррентий через ОПФ

Математики изучают не предметы, а отношения между предметами.

— Анри Пуанкаре

Метод ОПФ

Идея: умножить рекурренту на x^n , просуммировать — и получить уравнение на $A(x)$.

1. Умножить рекурренту на x^n и просуммировать по всем подходящим n .
2. Выразить суммы через $A(x)$ с помощью сдвигов.
3. Решить уравнение относительно $A(x)$.
4. Разложить $A(x)$ на простейшие дроби.
5. Развернуть каждую дробь в ряд.
6. Прочитать коэффициент: $a_n = [x^n]A(x)$.

Характеристический метод — частный случай этого маршрута.

ОПФ работает и там, где характеристическому методу тесно: кратные корни требуют отдельных обоснований, а нелинейные рекурренты ему не по силам.

Фибоначчи: от рекурренты к дроби

Рекуррента $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ верна при $n \geq 2$; умножаем на x^n и суммируем:

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^n.$$

Слева $F(x) - x$ — нулевой и первый члены уже не в сумме.

Справа $xF(x)$ и $x^2F(x)$ — два сдвига.

$$F(x) - x = xF(x) + x^2F(x), \quad \text{откуда} \quad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Дробь не похожа на числа Фибоначчи — и всё же несёт их все в коэффициентах.

Фибоначчи: от дроби к формуле

Знаменатель раскладывается: $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$.

Простейшие дроби дают

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x} \right).$$

Каждая дробь — геометрический ряд $\frac{1}{1 - \rho x} = \sum \rho^n x^n$.

Читаем коэффициент:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Та же формула Бине, что из характеристического уравнения — но без угадывания вида решения.

Кратные корни

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4.$$

Метод ОПФ: $A(x) - 1 - 4x = 4x(A(x) - 1) - 4x^2A(x)$.

$$A(x) = \frac{1}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{1}{(1 - 2x)^2}.$$

Кратному корню отвечает ряд $\frac{1}{(1-\rho x)^m} = \sum \binom{n+m-1}{n} \rho^n x^n$.

$$a_n = \binom{n+1}{n} 2^n = (n+1)2^n$$

— тот же ответ, что дало характеристическое уравнение.

Каталан через ОПФ

Рекуррента Каталана — свёртка с собой, то есть коэффициент при x^n в $C(x)^2$:

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

Квадратное уравнение даёт $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ — корень выбирается условием $C(0) = C_0 = 1$.

Разложение корня обобщённым биномом Ньютона читает коэффициенты:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Нелинейная рекуррента — алгебраическое уравнение на ряд: характеристическому методу такой случай не по силам.

Экспоненциальные производящие функции

Определение 1 (ЭПФ (*exponential generating function*))

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Для последовательности из единиц: $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$.

ОПФ — для неразмеченных объектов, ЭПФ — для помеченных: множитель $\frac{1}{n!}$ гасит факториальный рост перестановок меток.

Таблица ЭПФ

a_n	$E(x)$
1	e^x
$n!$	$\frac{1}{1-x}$
c^n	e^{cx}
B_n (числа Белла)	e^{e^x-1}

Числа Белла получают ЭПФ e^{e^x-1} : блок разбиения даёт $e^x - 1$, набор блоков — экспоненту.

Одна строка ряда — и разбиения из лекции о Стирлингах упакованы в формулу.

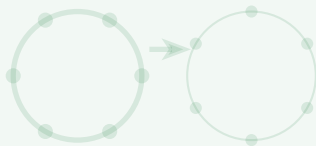
Что дал ряд?

Рекуррента превратилась в уравнение, уравнение — в формулу, формула — в коэффициент.

Рациональная ОПФ $\leftrightarrow$ линейная рекуррента: знаменатель $1 - c_1x - \dots - c_kx^k$ — характеристический многочлен наизнанку.

Ряды работают и как источник асимптотики: особенности $A(x)$ диктуют рост a_n .

Та же конструкция с распределением вместо последовательности — вероятностная производящая функция, мост к теории вероятностей.



Лемма Бёрнсайда

Симметрия, как широко или узко ни определять её смысл, — одна из идей, через которые человек веками пытался понять и создать порядок, красоту и совершенство.

— Герман Вейль

Сколько ожерелий?

Ожерелье из n бусин k цветов: повороты не создают нового ожерелья.

Прямой подсчёт даёт k^n раскрасок — но каждое ожерелье посчитано несколько раз.

Раскраски разбиваются на *орбиты*: классы, переходящие друг в друга поворотами.

Считать нужно орбиты — классы эквивалентности под действием группы поворотов.

Непериодическое ожерелье имеет орбиту из n раскрасок, а монотонное (все бусины одинаковы) — орбиту из одной.

Делить «в лоб» на n нельзя — нужна лемма.

Лемма Бёрнсайда

Теорема 1 (Лемма Бёрнсайда)

Число орбит группы G , действующей на множестве X :

$$\text{число орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

где X^g — неподвижные точки элемента g .

Среднее число неподвижных точек по всем симметриям.

Идея доказательства — двойной подсчёт пар (g, x) с $g \cdot x = x$: по элементам группы и по элементам множества.

Частые орбиты дают много симметрий-неподвижных точек, редкие — мало: среднее взвешивает честно.

Ожерелья из трёх бусин

$X = \{0, 1\}^3$ — раскраски трёх бусин в два цвета, $|X| = 2^3 = 8$.

Группа G — повороты на 0, 1 и 2 позиции, $|G| = 3$.

1. Поворот на 0: неподвижны все 8 раскрасок.
2. Поворот на 1: неподвижны только одноцветные 000, 111 — 2.
3. Поворот на 2: снова 2.

$$\frac{8 + 2 + 2}{3} = 4$$

— четыре ожерелья: пустое, полное, с одной белой бусиной и с одной чёрной.

Теорема Пойа

Теорема 2 (Теорема Пойа)

Перестановка g раскладывается в циклы, $c(g)$ — число циклов. Тогда

$$|X^g| = k^{c(g)} : \quad \text{число орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{c(g)}.$$

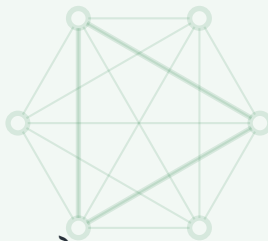
Каждый цикл обязан быть одноцветным — отсюда степень $c(g)$.

Повороты ожерелья из n бусин (простое n): тождественный поворот даёт k^n , остальные $n - 1$ — один цикл и k раскрасок:

$$\frac{k^n + (n - 1)k}{n}.$$

Граней у куба 6, вращений 24: $\frac{2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2}{24} = 10$ раскрасок.

Теория Рамсея



Пришельцы грозят уничтожить Землю через год, если человечество не вычислит число Рамсея для пяти красных и пяти синих — соберём лучшие умы и вычислим. А если потребуют для шести и шести — не останется ничего, кроме упреждающего удара.

— Пол Эрдёш

Компания из шести человек

Теорема 3

В любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Раскрасим рёбра K_6 : знакомство — красное ребро, незнакомство — синее.

Утверждение: в любой такой раскраске есть одноцветный треугольник.

Шесть — минимальное число с этим свойством.

Почему шесть?

Доказательство

Выберем человека A : оставшиеся пять делятся на знакомых и незнакомых с A .

По принципу Дирихле (5 человек, 2 ящика) в одном ящике не менее $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ человек.

Пусть это знакомые B, C, D .

Если среди B, C, D есть знакомая пара, скажем B и C , то A, B, C — тройка попарно знакомых.

Если знакомых пар нет, то B, C, D попарно незнакомы — искомая тройка.

Случай трёх незнакомых с A разбирается симметрично.

Дирихле даёт ящик, и уже внутри ящика структура неизбежна.

Пять недостаточно

Пять человек по кругу, каждый знаком ровно с двумя соседями.

Тройка попарно знакомых потребовала бы треугольника знакомств — а знакомства образуют цикл длины 5.

Тройка попарно незнакомых потребовала бы треугольника незнакомств — а незнакомства образуют тот же цикл.

Значит, $R(3, 3) > 5$, и вместе с доказательством при шести это даёт $R(3, 3) = 6$.

Числа Рамсея

Определение 2 (Число Рамсея)

$R(s, t)$ — минимальное n , при котором любая раскраска рёбер K_n в два цвета содержит красный K_s либо синий K_t .

$R(s, t)$	Значение
-----------	----------

$R(3, 3)$	6
-----------	---

$R(3, 4)$	9
-----------	---

$R(3, 5)$	14
-----------	----

$R(4, 4)$	18
-----------	----

$R(5, 5)$	неизвестно: $43 \leq R(5, 5) \leq 48$
-----------	---------------------------------------

Перебор безнадёжен: графов на n вершинах $2^{\binom{n}{2}}$ — при $n = 43$ это число с 272 цифрами.

За полвека диапазон для $R(5, 5)$ сжался лишь до шести значений.

Теорема Рамсея

Теорема 4 (Теорема Рамсея)

Для любых s и t число $R(s, t)$ существует — конечно.

В общей форме: при любой раскраске r -элементных подмножеств бесконечного множества найдётся бесконечное подмножество, все r -подмножества которого одноцветны.

При $r = 1$ это принцип Дирихле: много объектов — есть совпадающие цвета.

При $r = 2$ — конечные числа Рамсея.

Рамсей — та же логика, что у Дирихле, поднятая на уровень структуры: в достаточно большом хаосе неизбежен порядок, хотя предъявить его мы не умеем.

Рамсей и информатика

Гарантия структуры без конструкции — рабочий инструмент, а не курьёз.

- Нижние оценки размера схем: экстракторы и хеш-функции опираются на рамсеевские конструкции.
- Приближённые алгоритмы: на достаточно больших экземплярах хорошее решение гарантировано.
- Комбинаторная геометрия: теорема Эрдёша—Секереша о выпуклых многоугольниках — та же, что в лекции о принципе Дирихле.

Лекция 16: что мы поняли?

- Метод ОПФ: рекуррента $\rightarrow$ уравнение на ряд $\rightarrow$ простейшие дроби $\rightarrow$ коэффициент. Так Фибоначчи превращаются в формулу Бине без угадывания.
- Нелинейные рекурренты (Каталан) дают алгебраические уравнения на $C(x) = 1 + xC(x)^2$, ЭПФ с $\frac{x^n}{n!}$ обслуживают помеченные объекты.
- Лемма Бёрнсайда считает орбиты средним числом неподвижных точек: ожерелья $\frac{8+2+2}{3} = 4$, теорема Пойа замещает подсчёт формулой $k^{c(g)}$.
- Теория Рамсея: $R(3, 3) = 6$ доказывается принципом Дирихле, числа $R(s, t)$ существуют, но большинство неизвестно — $R(5, 5)$ зажат между 43 и 48.
- Через весь семестр прошёл один ход: гарантия существования там, где конструкция недостижима.

Вопросы для самопроверки

1. Выведите $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ из рекурренты Фибоначчи.
2. Почему при кратном корне появляется множитель n — что даёт ряд $\frac{1}{(1-2x)^2}$?
3. Откуда берётся уравнение $C(x) = 1 + xC(x)^2$ и почему выбирается корень с $C(0) = 1$?
4. Чем ЭПФ отличается от ОПФ и когда нужна каждая?
5. Посчитайте число ожерелий из 5 бусин 2 цветов с точностью до поворота.
6. Почему пяти человек недостаточно для тройки попарно знакомых или попарно незнакомых?

Экзамен

Экзамен за семестр 2 — в летнюю сессию, июнь.

Даты задаёт расписание вуза.

На экзамене — весь семестр: от графов до производящих функций. Теоретический минимум — по конспектам и главам книги.

Семестр 2: что мы прошли?

- Графы — язык связей: обходы, деревья, паросочетания, планарность, раскраска, потоки.
- Конечные автоматы — память как число состояний: ДКА и НКА, регулярные выражения, лемма о накачке, минимизация.
- Машина Тьюринга и разрешимость — граница вычислимого: универсальная машина, проблема остановки, теорема Райса.
- Комбинаторика и производящие функции — искусство счёта: правила, бином, включение-исключение, рекурренты, ряды, Бёрнсайд, Рамсей.
- Дальше — семестр 3: алгебраические структуры, криптография, вероятность.